

Kirby diagram and Kirby calculus

伊勢 彩夏

東京工業大学 理学院数学系数学コース 修士 2 年

4次元多様体の図示の方法である Kirby diagram とその diagram の変形方法である Kirby calculus について述べる.

1 Kirby diagram

パラコンパクト可微分多様体は, Morse 理論から handle 分解が可能である. 4次元多様体は 0-handle, 1-handle, 2-handle, 3-handle, 4-handle に分解することができる. 0, 1, 2-handle が接着されている段階で多様体を特定できてしまう ([2] 参照) ことから, 0-handle に 1, 2-handle がどのように接着されているか図示することで 4次元多様体を表現できる. Kirby diagram は 0-handle を \mathbb{R}^3 と見て, \mathbb{R}^3 内に 1, 2-handle の attaching region (sphere) である S^1 を描いたものである.

定義 1.1 (Handle) $0 \leq k \leq n$ に対して n 次元 k -handle $h^k := D^k \times D^{n-k}$

handle は多様体の境界に接着される. h^k において $\partial D^k \times D^{n-k}$ を attaching region, $\partial D^k \times 0$ を attaching sphere, $0 \times \partial D^{n-k}$ を belt sphere という.

Kirby diagram を描くには, まず 4次元多様体を handle 分解する. そして, できた 0-handle, 1-handle, 2-handle を, 位置関係に気をつけながら以下のように描く. まず, 0-handle は $h^0 = D^0 \times D^4$ であり, その belt sphere は $0 \times \partial D^4 = S^3$ であることから, S^3 を \mathbb{R}^3 と見て h^0 の belt sphere は \mathbb{R}^3 であると思う. 次に 1-handle は $h^1 = D^1 \times D^3$ であり, その attaching region は $\partial D^1 \times D^3 = \{\pm 1\} \times D^3$ である. すなわち, 2つの D^3 が attaching region となる. よって, \mathbb{R}^3 内に 2つの D^3 を描けば 0-handle に 1-handle が接着されている様子を表現できたことになる. この 2つの D^3 は dotted circle として表すことも可能で, dotted circle の方が扱いやすいため, 以下 1-handle の表記は dotted circle を用いる. 最後に 2-handle は $h^2 = D^2 \times D^2$ であり, その attaching region は $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ である. $S^1 \times D^2$ を描くのは大変なので, attaching sphere ($S^1 \times D^2$ の中心線) である S^1 と, framing coefficient を添えて描くことで 2-handle の接着されている様子を表現することにする. 以上より, Kirby diagram は \mathbb{R}^3 内に dotted circle と framing 付きの circle が描いているようなものとなる. また, 3, 4-handle はいくつあるかわかるように diagram の横に $\cup h^3 \cup h^4$ などと書くことにする.

例 1.2 $\mathbb{C}P^2, S^2 \times S^2, S^3 \times S^1$ の Kirby diagram は図 1 のようになる.

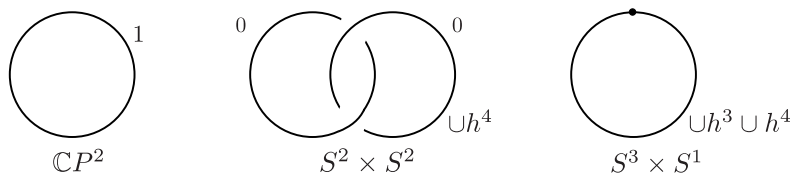


図 1

2 Kirby calculus

X : n 次元多様体

定義 2.1 (slide) h_1, h_2 を k -handle ($0 < k < n$) で, ∂X に接着されているものとする. h_2 を渡る h_1 の slide とは, h_1 の attaching sphere を $\partial(X \cup h_2)$ 上で滑らせて h_2 の belt sphere を通ったのち完全に分離することである.

命題 2.2 (cancel) $0 \leq k \leq n$ として, $(k-1)$ -handle の belt sphere と k -handle の attaching sphere が一点で横断的に交わるとき, $(k-1)$ -handle と k -handle は cancel することができる. このとき, $(k-1)$ -handle と k -handle を cancelling pair という.

上の命題は, $X \cup h^{k-1} \cup h^k$ と X が diffeomorphism であることからわかる.

定理 2.3 $(X, \partial X)$ の任意の 2 つの Kirby diagram は

- handle slides
- creating/annihilating cancelling pairs

によって移り合う.

slide と cancel が Kirby diagram のなかでどのように表されるのかをみていく. まず slide は, slide される方の S^1 のコピーと slide する方の S^1 のバンド和を取ることによって得られる. S^1 にあらかじめ向きを定めておくと向きを保つようにバンドを貼る場合とそうでない場合が考えられる. 向きを保つようにバンドを貼る slide を add, そうでない slide を subtract という. 2-handle を他の 2-handle に slide させる場合, slide する方の 2-handle の framing coefficient が変化することに注意しなければならない. 具体的には slide される方の $S^1 =: K_1$ の framing coefficient を n_1 , slide する方の $S^1 =: K_2$ の framing coefficient を n_2 とすると, K_2 の framing coefficient は n_2 から $n_1 + n_2 \pm 2lk(K_1, K_2)$ に変化する (add のときは+, subtract のときは-).

次に cancel だが, Kirby diagram では, dotted circle と framing circle が Hopf link の形になっている時に cancel ができる. cancel したい handle たちに他の handle が絡んでいる時はうまく slide して解く必要がある.

Handle の slide と cancel を使うことで, 正体不明の多様体を特定することができる.

例 2.4 図 2 の Kirby diagram で表される多様体は $S^2 \times S^2$ である.

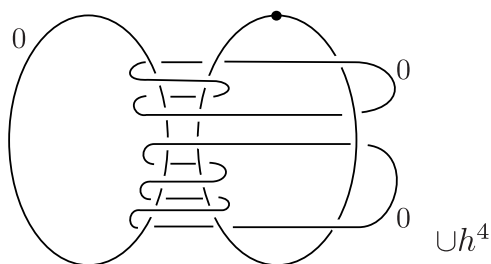


図 2

参考文献

- [1] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
- [2] F. Laudenbach and V. Poénaru, A note on 4-dimensional handlebodies, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 337-334.

AdS₃ 空間

東京大学大学院数理科学研究科修士2年 浅香 猛

1 動機

”AdS₃ 空間内のある条件を満たす曲面全体の空間” と ”曲面のタイヒミュラー空間と measured geodesic lamination の空間の直積” との間に良い対応があり、Thurston の地震定理の別証明が生まれた ([M])。これが曲面の双曲幾何についての新たな研究方策の端となり、今も注目されている、らしい。

- タイヒミュラー空間とは、ある曲面に対し、その複素構造と基本群の標準生成系の組をすべて集めたもの。複素構造のみを考えすべて集めたものはモデュライ空間と呼ばれ多様体とはならない。それに対し、タイヒミュラー空間はより厳しい目で類別しているおかげで、ある次元の球と同相な多様体となる。([IT] 参照)
- measured geodesic lamination とは、ある曲面に対し、”互いに交叉を持たない複数の測地線よりなる閉集合” と ”その閉集合を台にもつ測度”の組である。ただし、測度には幾つか条件を持たせる。([CB],[PH] 参照)
- Thurston の地震定理とは、タイヒミュラー空間の任意の2つの元に対し、一方に earthquake という操作をする事で必ずもう一方に変形できるというもの。geodesic lamination に沿って曲面をズラして変形するイメージである。(良い文献を探し中)

2 AdS₃ 空間の定義・性質

$$\mathbf{R}^{2,2} := \{\mathbf{x} = (x, y, u, v) \in \mathbf{R}^4\} \text{ with 内積 } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle := xx' + yy' - uu' - vv', \text{ 計量 } dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2$$
$$\widehat{AdS}_3 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,2} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$$

とおく。R^{2,2} の接空間は R^{2,2} と同一視されるので、実は計量は内積より定まっている。さらに

$$\mathbf{R}^{2,1} := \{\mathbf{x} = (x, y, u) \in \mathbf{R}^3\} \text{ with 内積 } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle := xx' + yy' - uu', \text{ 計量 } dx^2 + dy^2 - du^2$$

$$H := \{(x, y, u) \in \mathbf{R}^{2,1} \mid x^2 + y^2 - u^2 = -1, u > 0\} \text{ with } \mathbf{R}^{2,1} \text{ より誘導される計量}$$

$$\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \text{ with ポアンカレ計量 } \frac{|dz|^2}{1 - |z|^2}$$

とおく。さらに

$$H \times S^1 := \{(x, y, u, \theta) \mid (x, y, u) \in H, \theta \in [0, 2\pi] \text{ mod } 2\pi\} \text{ with 計量 } dx^2 + dy^2 - du^2 - d\theta^2$$

とおく。また、 \cong で等長な全単射が存在することを表す。

Proposition 1 $\mathbf{D} \stackrel{\text{isom}}{\cong} H$ さらに $\widehat{AdS}_3 \stackrel{\text{isom}}{\cong} H \times S^1$

(proof) 1つ目は、 $f: H \rightarrow \mathbf{D}$, $f(x, y, u) = \frac{x + iy}{1 + u}$ でよい。逆に解き直せば、全単射が示せ、あとは計算で等長と示せる。2つ目は、 $g: H \times S^1 \rightarrow \widehat{AdS}_3$, $g(x, y, u, \theta) = (x, y, u \cos \theta, u \sin \theta)$ で同じく示せる。■

この2つの同型より、トポロジ的には \widehat{AdS}_3 は solid torus $\mathbf{D} \times S^1$ と見てよい。計算するときには $H \times S^1$ を用いればよい。

\widehat{AdS}_3 に対し、 \mathbf{x} と $-\mathbf{x}$ を同一視した商空間 $AdS_3 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,2} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\} / \mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$ として AdS_3 空間は定義される。

さて、早速見づらいので $\mathbf{D} \times S^1 = \{(z, \theta) \mid |z| < 1, \theta \in [0, 2\pi] \text{ mod } 2\pi\}$ で考えよう。 $\mathbf{D} \times S^1$ での同値関係は、Proposition 1 の証明より、 $(z, \theta) \sim (-z, \theta + \pi)$ となる。これはつまり、 \widehat{AdS}_3 を $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の部分に分け、後者の $\theta = 2\pi$ を掴んで捻りながら、前者の $\theta = 0$ から突っ込み、最終的に π だけ回った $\theta = 2\pi$ の円盤が前者の $\theta = \pi$ の円盤と重なり、後者の $\theta = \pi$ の円盤が回らずそのまま前者の $\theta = 0$ の円盤と重なり合うまで入れ込む。こうして2つの部分について、重なった部分が同一視される。

いったん、 \widehat{AdS}_3 に戻ろう。

$M_2(\mathbf{R}) := \{2 \times 2 \text{ 行列}\}$ with 内積 $\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \text{tr} AB^\sim$, $B^\sim := (\det B) B^{-1}$ と定義する。 $M_2(\mathbf{R})$ の接空間は $M_2(\mathbf{R})$ と同一視できるので、計量も内積より定まる。

Proposition 2 $\mathbf{R}^{2,2} \stackrel{\text{isom}}{\cong} M_2(\mathbf{R})$ さらに $\widehat{AdS}_3 \stackrel{\text{isom}}{\cong} SL(2, \mathbf{R})$ そして $AdS_3 \stackrel{\text{isom}}{\cong} PSL_2(\mathbf{R})$

(proof) 1つ目は、 $\Phi: \mathbf{R}^{2,2} \rightarrow M_2(\mathbf{R})$, $\Phi(x, y, u, v) := \begin{pmatrix} x+u & y-v \\ y+v & -x+u \end{pmatrix}$ より、示される。 Φ は線形写像なので、内積について不変と示せば、そのまま計量について不変であると示したことになる。2、3つ目は定義よりすぐに示される。 ■

$Isom^+(\widehat{AdS}_3) := \{\hat{\phi}: \widehat{AdS}_3 \rightarrow \widehat{AdS}_3, \text{向きを保つ等長な全単射}\}$

$Isom^+(AdS_3) := \{\phi: AdS_3 \rightarrow AdS_3, \text{向きを保つ等長な全単射}\}$

とおく。 $\stackrel{\text{gp.isom}}{\cong}$ で、群同型を表すとする。

Proposition 3 $Isom^+(\widehat{AdS}_3) \stackrel{\text{gp.isom}}{\cong} SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) / \{\pm I \times I\}$ また $Isom^+(AdS_3) \stackrel{\text{gp.isom}}{\cong} PSL_2(\mathbf{R}) \times PSL_2(\mathbf{R})$

(proof) $\Psi: SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) \rightarrow Isom^+(\widehat{AdS}_3)$, $(g, h) \mapsto (\mathbf{x} \mapsto g\mathbf{x}h^{-1})$

と定め、終域が $Isom^+(\widehat{AdS}_3)$ に収まっていること、核が (I, I) or $(-I, -I)$ (I は単位行列) であることを計算でまず確かめられる。あとは全射を示せば良い。 $Im \Psi$ が \widehat{AdS}_3 に transitive に作用していることはすぐに分かる。よって、 $Isom^+(\widehat{AdS}_3)$ の2つの元について、 \widehat{AdS}_3 のある一点の像および微分が等しければ、同じ元である。よって、 $f \in Isom^+(\widehat{AdS}_3)$ に対し、 $\{\mathbf{x} \in \widehat{AdS}_3 \mid \Phi(g, h)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}$ において $\Phi(g, h)$ と f の微分も等しい $\}$ は \widehat{AdS}_3 内で開集合となる。閉集合となるのは、明らかで、 \widehat{AdS}_3 は Proposition 1 より連結であるから、 \widehat{AdS}_3 そのものとなる。よって、 $\Psi(g, h)$ は f と一致するので全射が確かめられた。後半も \widehat{AdS}_3 に持ち上げて考えれば前半よりすぐ導かれる。 ■

参考文献

- [CB] Andrew J. Casson, Steven A. Bleiler, Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston (London Mathematical Society Student Texts), Cambridge University Press, 1988
- [IT] 今吉洋一 谷口雅彦, タイヒミュラー空間論 (新版), 日本評論社, 2004
- [M] G. Mess, Lorentz spacetimes of constant curvature, Geom. Dedicata 126, 2007
- [PH] R.C. Penner, J.L. Harer, Combinatorics of Train Tracks. (AM-125), Princeton University Press, 1991

グラフから定まる複体について

大阪大学理学研究科 M2 小路史朗

§1 はじめに

$G = (V, E)$ を有限単純グラフとする. $c: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ が *proper n -coloring* であるとは, $uv \in E$ ならば $c(u) \neq c(v)$ を満たすときをいう. proper n -coloring が存在するような最小の $n \in \mathbb{Z}$ を G の彩色数といい $\chi(G)$ で表す. $\chi(G)$ は整数値のグラフ不変量である. $\chi(G)$ を求める問題を graph coloring problem という. graph coloring problem は定義から下からの評価が重要になってくるが、これを求めるために様々な複体が導入された [1]. 本稿ではその一部を紹介する.

§2 近傍複体

Definition 1 $G = (V, E)$ を有限単純グラフとする. 頂点集合が V で, common neighbor をもつ V の部分集合を単体とするような単体複体 $N(G)$ を近傍複体という. ここで $A \subset V$ の *common neighbor* とは, 任意の $a \in A$ と隣接するような V の元のことである.

例えば, K_n を完全グラフとすると, $N(K_n)$ は標準 $(n-1)$ -単体 Δ_{n-1} の boundary complex となる.

位相空間 X に対して X が k -connected であるとは, 任意の $i \in \{-1, \dots, k\}$ と任意の $x \in X$ に対して, ホモトピー群 $\pi_i(X, x)$ が自明であるときをいう. これは, 任意の $i \in \{-1, \dots, k\}$ に対して, i 次元球面 S^i から X への連続写像が常に $i+1$ 次元円板 D^{i+1} へ拡張できることと同値である.

近傍複体の位相は graph coloring problem において重要な情報を与える:

Theorem 2 (Lovász, 1978, [1]) 任意のグラフ G に対して, $|N(G)|$ が k -connected であれば, $\chi(G) \geq k+3$ が成り立つ.

Definition 3 整数 n, k が $k \geq 1, n \geq 2k$ を満たすとする. 頂点集合を $\binom{\{1, \dots, n\}}{k} := \{u \subset \{1, \dots, n\} \mid \#u = k\}$ とし, $u, v \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}$ が $u \cap v = \emptyset$ を満たすとき u と v を辺で結ぶ. このようにして得られる有限単純グラフを *Kneser graph* といい, $KG_{n,k}$ と表す.

Theorem 4 $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$.

この定理は前の Theorem 2 と次の命題から容易に導かれる.

Proposition 5 $|N(KG_{n,k})|$ は S^{n-2k} の wedge sum とホモトピー同値になる.

この命題において, $|N(KG_{n,k})|$ とホモトピー同値になる S^{n-2k} の wedge sum を構成する S^{n-2k} の個数を $f_{n,k}$ とする, すなわち $|N(KG_{n,k})| \simeq \bigvee_{f_{n,k}} S^{n-2k}$ とする. $f_{n,k}$ の値は一般には知られていない. 筆者は $k = 2, 3$ の場合の $f_{n,k}$ の値, すなわち $f_{n,2}, f_{n,3}$ を求めた:

Theorem 6 $f_{n,2} = n(n-3) + 1$. $f_{n,3} = \frac{n(n-2)(n-3)(n-5)}{4} + 1$.

§3 Hom 複体

§2 で近傍複体 $N(G)$ が graph coloring problem を解くことに貢献することをみた. 今節では, Hom 複体という概念と Hom 複体も彩色数の下からの評価を与えることを紹介する.

Definition 7 $G = (V(G), E(G)), H = (V(H), E(H))$ を有限単純グラフとする. G から H への *multihomomorphism* とは, 写像 $\varphi : V(G) \rightarrow 2^{V(H)} \setminus \{\emptyset\}$ であって, 任意の $v \in V(G)$ に対して $f(v) \in \varphi(v)$ を満たすような写像 $f : V(G) \rightarrow V(H)$ が必ず graph morphism となるようなものをいう. G から H への multihomomorphism 全体の集合を Hom 複体といい, $\text{Hom}(G, H)$ と表す.

$\text{Hom}(G, H)$ は次のようにして CW-複体と見なすことができる.

$\varphi \in \text{Hom}(G, H)$ とする. まず, $2^{V(H)} \setminus \{\emptyset\}$ と $\Delta_{\sharp V(H)-1}$ の face 全体の集合が自然に同一視できることに注意する. この同一視の下で, 各 $v \in V(G)$ に対して $\varphi(v) \subset V(H)$ は $\Delta_{\sharp V(H)-1}$ の face F_v^φ を定める. そして, φ と

$$\prod_{v \in V(G)} F_v^\varphi \left(\subset \prod_{v \in V(G)} \Delta_{\sharp V(H)-1} \right)$$

を同一視する. $\text{Hom}(G, H)$ の幾何学的実現 $|\text{Hom}(G, H)|$ を

$$|\text{Hom}(G, H)| := \bigcup_{\varphi \in \text{Hom}(G, H)} \left(\prod_{v \in V(G)} F_v^\varphi \right)$$

と定義する.

$|\text{Hom}(K_2, H)|$ や奇数次サイクルグラフ C_{2r+1} を定義域とするような Hom 複体 $|\text{Hom}(C_{2r+1}, H)|$ には free \mathbb{Z}_2 -action が入る.

一般に, \mathbb{Z}_2 -space X に対して, 連続な \mathbb{Z}_2 -map $S^k \rightarrow X$ が存在するような最大の整数 $k \geq 0$ を X の \mathbb{Z}_2 -coindex といい, $\text{co-ind}(X)$ と表す. ここで, \mathbb{Z}_2 の S^k への作用は antipodal action である.

Theorem 8 (Babson, Kozlov, [3]) 任意の有限単純グラフ G と正整数 r に対して, $\chi(G) \geq \text{co-ind}(|\text{Hom}(C_{2r+1}, G)|) + 3$ が成り立つ.

参考文献

- [1] László Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J. Combinatorial Theory, Ser. A 25(1978), 319-324.
- [2] Mark de Longueville, *A Course in Topological Combinatorics*, Springer Science+Business Media New York, 2013.
- [3] Eric Babson, Dmitry Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Annals of Mathematics(Second Series)165(2007), no.3, 965-1007.

格子三角形の個数について

須山 雄介*

大阪市立大学 大学院理学研究科 後期博士課程 3 年

\mathbb{Z}^2 の有限部分集合の \mathbb{R}^2 における凸包を格子多角形とよぶ。格子多角形 $P \subset \mathbb{R}^2$ の面積, 境界上の格子点の個数, 内部の格子点の個数をそれぞれ $a(P), b(P), i(P)$ で表す。

定理 1 (Pick の公式). 任意の格子多角形 $P \subset \mathbb{R}^2$ に対し, $a(P) = i(P) + b(P)/2 - 1$ が成り立つ。

非負整数の対 $(b(P), i(P))$ がとり得る範囲も知られている。

定理 2 (Scott [2]). b, i を非負整数とする。格子多角形 $P \subset \mathbb{R}^2$ で $(b, i) = (b(P), i(P))$ となるものが存在するための必要十分条件は, b, i が次のいずれか 1 つを満たすことである。

1. $i = 0$ かつ $b \geq 3$.
2. $i = 1$ かつ $3 \leq b \leq 9$.
3. $i \geq 2$ かつ $3 \leq b \leq 2i + 6$.

更に, これらはすべて三角形または四角形で実現できる。

しかし, 格子三角形だけでどれくらい実現できるかという途端に複雑な問題となり, 完全な解答は知られていない。

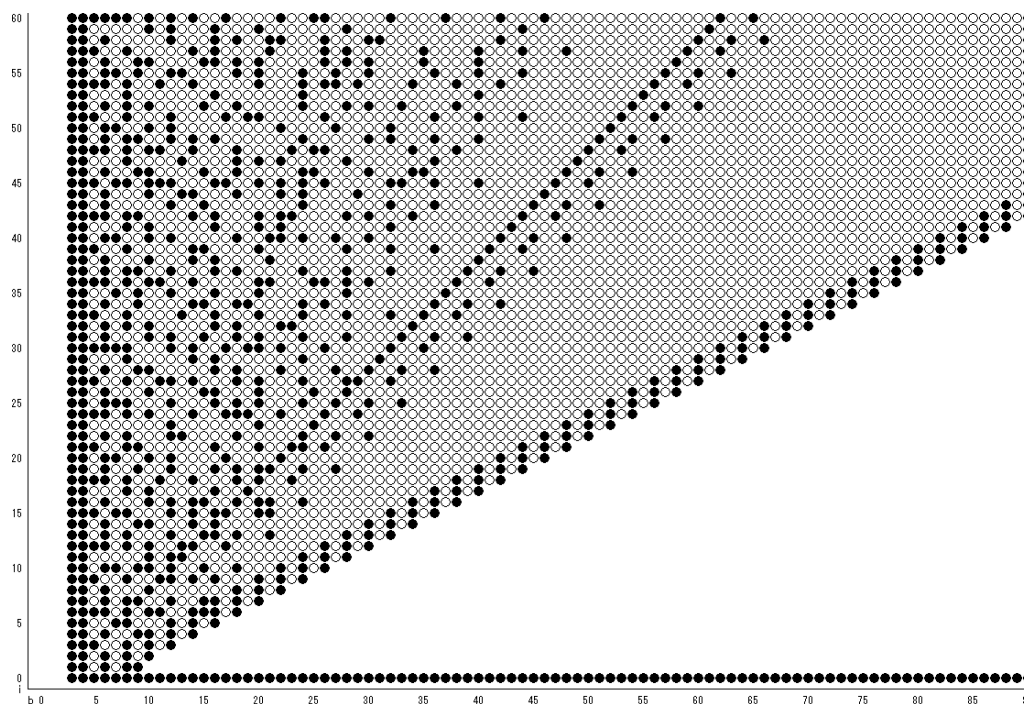


図 1: ● : 格子三角形で実現可能. ○ : 格子三角形では実現できないが, 格子四角形で実現可能.

それでも, 格子三角形で実現できない点 (b, i) が無限個の錐体をなすように見える (点 $(9, 1)$ は例外). 実際, 次の定理が知られている。

*本研究は, 科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものである。

定理 3 (Hofscheier–Nill–Öberg [1]). 正の整数 c に対し,

$$\sigma_c^\circ = \{(b, i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid b(c-1)/2 - (c-1) < i < bc/2 - c(c+2)\}$$

とおく. $T \subset \mathbb{R}^2$ を格子三角形とすると, $(b(T), i(T)) \in \bigcup_{c \geq 1} \sigma_c^\circ$ ならば $(b(T), i(T)) = (9, 1) \in \sigma_1^\circ$ である.

逆に (b, i) を固定したときに, $(b, i) = (b(T), i(T))$ となる T がどれくらいあるかという問題も考えられる.

定義 4. 2 つの格子多角形 $P, P' \subset \mathbb{R}^2$ がユニモジュラー同値であるとは, 2 次のユニモジュラー行列 A と $b \in \mathbb{Z}^2$ で, $P' = AP + b$ となるものが存在することをいう. これは同値関係 \sim を定める.

今回, $b = 3$ (すなわち, 境界上の格子点が頂点のみ) の場合に結果が得られた. 非負整数 n に対し, $\mathcal{T}_n = \{T : \text{格子三角形} \mid (b(T), i(T)) = (3, n)\} / \sim$ とおく.

定理 5. 非負整数 n に対し, $x_n = |\{x \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^\times \mid x-1 \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^\times\}|$ とおくと,

$$|\mathcal{T}_n| = \begin{cases} \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}2^t + \frac{1}{2} & (2n+1 = 3^e p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}, 0 \leq e \leq 1, p_i \equiv 1 \pmod{6} \text{ と素因数分解する場合}), \\ \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{2} & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_n	1	1	3	5	3	9	11	3	15	17	5	21	15	9	27	29	9	15	35	11
$ \mathcal{T}_n $	1	1	1	2	1	2	3	1	3	4	2	4	3	2	5	6	2	3	7	3

表 1: n が小さい場合の $|\mathcal{T}_n|$.

例 6. $n = 6$ の場合, $2n+1 = 13$ だから定理 5 の素因数分解ができる場合に当たり, $t = 1$ である. ゆえに

$$|\mathcal{T}_6| = \frac{1}{6}x_6 + \frac{1}{3}2^t + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 3.$$

実際, たとえば

$$\{\text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (2, 13)\}, \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (3, 13)\}, \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (4, 13)\}\}$$

は, $(b(T), i(T)) = (3, 6)$ を満たす格子三角形 T 全体のユニモジュラー同値に関する完全代表系である.

注意 7. 定理の証明で中国の剰余定理を用いるので, 同値類の個数はわかっていても, 完全代表系を具体的に求めるのは一般には容易でない.

境界上の格子点が頂点のみの四角形や五角形などに対しても, 同様の問題が考えられる. 四角形の場合の計算結果は次の通りである.

内部の格子点	0	1	2	3	4	5	6	7
境界上の格子点が頂点のみの四角形の同値類	1	2	4	6	8	15	15	18

表 2: 格子四角形の同値類の個数.

参考文献

- [1] J. Hofscheier, B. Nill and D. Öberg, *On Ehrhart polynomials of lattice triangles*, arXiv:1609.09526.
 [2] P. R. Scott, *On convex lattice polygons*, Bull. Austral. Math. Soc. 15 (1976), no. 3, 395–399.

イソトピーに関する注意

東京工業大学修士一年 山崎 晃司

2017/08/24

イソトピーは通常、閉区間 I 上のファイバーの埋め込みとして定義される。一方、いくつかの文献では space of embeddings 上の”曲線”として定義されているが、これらの定義が同値であるか否かについてはあまり注意が払われていないように思う。今回は実際にその反例を構成し、二つの定義が同値でないことを紹介する。しかし、定義域がコンパクトであるか、余次元が 0 かつ定義域が境界を持たないとき、これらの定義の同値性は容易に示せる。よって、例えば結び目理論等を研究する上ではこれらを区別する必要はない。

M, N を C^r 級多様体 ($0 \leq r \leq \infty$) とする。また、 $I = [0, 1]$ とし、 $t \in I$ に対して $p \mapsto (p, t)$ を t で表す。

定義 1 (イソトピーの二つの定義)

二つの C^r 級写像 $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ のイソトピーとは、埋め込み $\hat{F} : M \times I \rightarrow N \times I$ であって、次の図式を可換にするものとする。

$$\begin{array}{ccc}
 M \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & N \times I \\
 \text{\scriptsize } pr_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{\scriptsize } pr_2 \\
 I & \xlongequal{\quad} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & N \times I \\
 \uparrow 0 & \circlearrowleft & \uparrow 0 \\
 M & \xrightarrow{f_0} & N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & N \times I \\
 \uparrow 1 & \circlearrowleft & \uparrow 1 \\
 M & \xrightarrow{f_1} & N
 \end{array}$$

二つの C^r 級写像 $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ の弱イソトピーとは、 f_0 と f_1 のホモトピー $F : M \times I \rightarrow N; (p, t) \mapsto F_t(p)$ であって、すべての t に対して $F_t : M \rightarrow N$ が埋め込みとなるものとする。

今、 $\hat{F} : M \times I \rightarrow N \times I$ および $F : M \times I \rightarrow N; (p, t) \mapsto F_t(p)$ が与えられたとして、さらに $\hat{F}(p, t) = (F_t(p), t)$ を満たすとする。

命題 2

- (i) \hat{F} がイソトピー $\Rightarrow F$ が弱イソトピー
 - (ii) F が弱イソトピー $\Rightarrow \hat{F}$ は単射であり、 $r \geq 1$ の時ははめ込みでもある。
- 一般に、 M がコンパクト $\Rightarrow \hat{F}$ は閉写像。
 $\dim M = \dim N$ かつ $\partial M = \emptyset \Rightarrow \hat{F}$ ははめ込みならば開写像。
 が成り立つので、特にこの場合は \hat{F} がイソトピー $\iff F$ が弱イソトピー

反例の構成

補題 3

$\exists \theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, 次を満たすものが存在する.

- (i) θ は C^∞ 級.
- (ii) $|x| \geq \frac{1}{2}$ ならば $\theta(x) = 0$.
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $\theta(x) = \theta(-x)$.
- (iv) $-\frac{1}{2} < x < 0$ ならば $\theta'(x) > 0$.
- (v) $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1$.

$$\therefore \theta(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{4}{1-4x^2}) & (|x| < \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}) \end{cases} \text{ とすればよい. } \square$$

補題 4

$\exists h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ で, 次を満たすものが存在する.

- (i) h は C^∞ 級.
- (ii) $\forall \epsilon \in (0, 5)$ に対し, h の $(0, 5 - \epsilon)$ への制限は埋め込み.
- (iii) $h(1) = h(5)$.

$\therefore x = 1, 5$ で交差する連続写像を軟化子 θ で smoothing すればよい. \square

定理 5

$\exists \hat{F} : (-\infty, 1) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ および $\exists F : (-\infty, 1) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2; (p, t) \mapsto F_t(p)$ であって, $\hat{F}(p, t) = (F_t(p), t)$ と, 次を満たすものが存在する.

- (i) \hat{F} および F は C^∞ 級.
- (ii) \hat{F} はイソトピーではない.
- (iii) F は弱イソトピーである.

$\therefore f_t(x) := \frac{t}{1-x} + \frac{1}{2-x}, \alpha_t(x) := (5-t)\frac{x}{1+x}$ として,

$$(-\infty, 1) \times I \xrightarrow{\hat{f}} (0, \infty) \times I \xrightarrow{\hat{\alpha}} (0, 5) \times I \xrightarrow{h \times id_I} \mathbb{R}^2 \times I$$

なる合成を \hat{F} とすればよい. \square

参考文献

- [1] 『微分トポロジー』 M.W. ハーシュ [著], 松本堯生 [訳]

リーマン面の退化族のトポロジー

大阪大学大学院理学研究科 PD 榎園 誠

講演ではリーマン面の退化族のトポロジーに関する研究についてお話するつもりなので、本稿ではその研究の背景を書かせていただくことにする。筆者は代数幾何が専門であり、トポロジーに関してはあまり詳しくないので、多少ボケたことを書いてしまうかもしれないがその点をご容赦して頂きたい。本稿ではリーマン面は全て閉リーマン面とする。リーマン面の位相構造は種数という位相不変量によって完全に決まることはよく知られている。次元を1つ上げてコンパクト複素曲面 X を考えると、その種数にあたるものは2つある。それは X の第1チャーン類の自己交点数 $c_1^2(X)$ と第2チャーン類 $c_2(X)$ である。もう少しトポロジーの言葉で表すと、ガウス・ボンネの定理より第2チャーン類は位相的オイラー数 $e(X)$ と一致し、ヒルツェブルフの符号数定理より X の符号数（つまり交点形式 $H^2(X, \mathbb{C}) \times H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ の符号数） $\sigma(X)$ は

$$\sigma(X) = \frac{1}{3}(c_1^2(X) - 2c_2(X))$$

を満たすので、 $c_1^2(X)$ と $c_2(X)$ を考えることは位相的オイラー数 $e(X)$ と符号数 $\sigma(X)$ を考えることと同値である。リーマン面の場合と違いこの2つの種数が完全に位相構造を決めるわけではないが、コンパクト複素曲面のトポロジーを調べるときにまず最初に考えるべき不変量であろう。これらの種数は次のようにも書ける。 X 上の正則関数のなす層（構造層）を \mathcal{O}_X 、正則2次形式のなす層（標準層）を ω_X とする。 $K_X = c_1(\omega_X) = -c_1(X)$ を ω_X の第1チャーン類とすると $K_X^2 = c_1^2(X)$ であり、 $\chi(\mathcal{O}_X)$ を \mathcal{O}_X の（層係数コホモロジーの）オイラー数とすると、ネーターの公式から

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + e(X)$$

が成立するので、 K_X^2 と $\chi(\mathcal{O}_X)$ を X の種数と思っても良い。

今度はコンパクト複素曲面 X がリーマン面の族の構造を持つ場合を考える。つまり、 X からリーマン面 B への全射正則写像 $f: X \rightarrow B$ があって、そのファイバー $f^{-1}(p)$ が有限個の $p \in B$ を除き種数 g のリーマン面であるとする（この種数 g は一意に決まる）。このとき写像 $f: X \rightarrow B$ をファイバー曲面といい、 g をファイバー曲面の種数という。この種数 g はあくまでファイバー曲面に関する不変量であって、曲面 X からは決まらないことに注意しておく（実際二つの種数が異なるファイバー曲面の構造を持つ曲面も存在する）。線織面（種数0のファイバー曲面）や楕円曲面（種数1のファイバー曲面）は非常によく調べられているので、本稿ではファイバー曲面の種数 g は2以上と仮定する。また、ファ

ファイバー曲面は相対極小である，つまりファイバーに含まれる自己交点数 -1 のリーマン球は存在しないと仮定する（相対極小でないファイバー曲面はそのようなリーマン球をブローダウンしていくことにより相対極小にできる）．ファイバー曲面 $f: X \rightarrow B$ を考えるときは，曲面 X の不変量 $c_1^2(X)$ や $c_2(X)$ を考えるよりも，不変量としては同値であるが相対接束のチャーン類を用いて $c_1^2(f)$ や $c_2(f)$ を考える方がもっとファイバー曲面の構造を反映した記述がしやすい．実際， $\omega_f = \omega_X \otimes f^* \omega_B^{-1}$ を f の相対標準層とすると，その第 1 チャーン類 $K_f = c_1(\omega_f)$ の自己交点数は $K_f^2 = c_1^2(f)$ であり， e_f を各ファイバー $f^{-1}(p)$ の位相的オイラー数 $e(f^{-1}(p))$ と一般ファイバーの位相的オイラー数 $2 - 2g$ の差を全てのファイバーに対し足し合わせたもの

$$e_f = \sum_{p \in B} (e(f^{-1}(p)) - 2 + 2g)$$

とすると， $e_f = c_2(f)$ が成立する．これを見ると $c_2(f)$ はファイバーの位相構造によって完全に決まることが分かる．また χ_f を $\chi(\mathcal{O}_X)$ のファイバー曲面版として

$$12\chi_f = K_f^2 + e_f$$

と定めると， K_f^2, e_f, χ_f は全て非負であり，

$$e_f = 0 \iff f \text{ は位相的なファイバー束（全てのファイバーは同相）}$$

$$\chi_f = 0 \iff f \text{ は正則ファイバー束（全てのファイバーは双正則）}$$

が成立する． b をパラメーター空間であるリーマン面 B の種数とすると， $K_X^2, e(X), \chi(\mathcal{O}_X)$ と K_f^2, e_f, χ_f の対応は

$$K_f^2 = K_X^2 - 8(g-1)(b-1)$$

$$e_f = e(X) - 4(g-1)(b-1)$$

$$\chi_f = \chi(\mathcal{O}_X) - (g-1)(b-1)$$

となっている．よって X の符号数は同じく

$$\sigma(X) = \frac{1}{3}(c_1^2(f) - 2c_2(f)) = K_f^2 - 8\chi_f$$

と表せる．従ってファイバーの位相構造から決まる e_f と X の位相構造から決まる $\sigma(X)$ が残りの不変量 K_f^2 や χ_f を決めているとあって良い．そこで， X の符号数 $\sigma(X)$ も e_f の記述のようにファイバーの構造を反映したような記述が出来ないかと考えるのは自然である．つまり，ファイバー $f^{-1}(p)$ の構造を反映した関数 $\sigma(f^{-1}(p))$ があり，有限個のファイバーを除き $\sigma(f^{-1}(p)) = 0$ で

$$\sigma(X) = \sum_{p \in B} \sigma(f^{-1}(p))$$

が成立するようなことがあるかということである． $\sigma(X)$ がこのような形で書けるとき， $\sigma(f^{-1}(p))$ のことを局所符号数という．局所符号数の研究は低次元代数幾何やレフシェツ

ツファイブレーションなどの4次元トポロジーの分野でそれぞれ独立に発展し、それが合わさり、面白い研究対象となっている。講演では種数2のファイバー曲面を例にとり、局所符号数にまつわる代数幾何側、トポロジー側からの研究などについてお話する予定である。この分野の参考文献として、[1], [2], [3]を挙げておく。

参考文献

- [1] 足利正・遠藤久顕, リーマン面の退化族の諸相, 数学 56 巻, 1 号 (2004),49–72.
- [2] T. Ashikaga and K. Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic Geometry 2000 Azumino, S. Usui et al. eds, 1-49, Adv. Stud. Pure Math. **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [3] Y. Kuno, Meyer functions and the signatures of fibered 4-manifolds, preprint, arXiv:1204.1701[math.GT].

Simplicial object について

宮田祐也

九州大学 数理学府 修士 1 年

1 simplicial category Δ

simplicial category とは対象を $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$ とし射 $f : [n] \rightarrow [m]$ を順序を保つ写像とする圏である。例えば

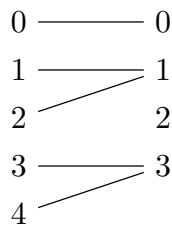


図 1 $\phi : [4] \rightarrow [3]$

である。

定理 1

全ての射 $\phi : [n] \rightarrow [m]$ は次のように一意に分解できる。

$$\phi = \delta_{i_1} \delta_{i_2} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_s} (i_1 \leq \dots \leq i_r, j_1 < \dots < j_s)$$

□

ここで $\delta_i (0 \leq i \leq n+1) : [n] \rightarrow [n+1]$ は i を含まない写像、 $\sigma_j (0 \leq j \leq n-1) : [n] \rightarrow [n-1]$ は $j, j+1$ を j におくる写像とする。

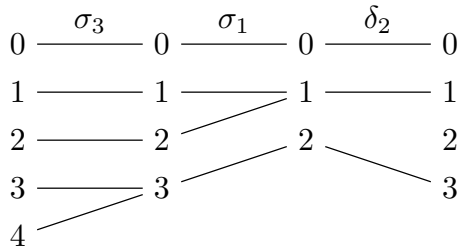


図2 $\phi = \delta_2 \sigma_1 \sigma_3$

この定理から、simplicial category の射は δ_i, σ_j によって生成されることがわかる。さらにこの δ_i, σ_j には次のような関係があることがわかる。

$$\begin{aligned} \delta_j \delta_i &= \delta_i \delta_{j-1} & \text{for } i < j \\ \sigma_j \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{j+1} & \text{for } i \leq j \\ \sigma_j \delta_i &= \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{for } i < j \\ id_{[n]} & \text{for } i = j, i = j + 1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{for } i > j + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

定義 1

- (1) 関手 $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ を simplicial object と呼ぶ。
- (2) 関手 $Y : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ を cosimplicial object と呼ぶ。 □

いくつか simplicial object の例を挙げる。

[例 1]

$\Delta^n = \{(t_0 \dots t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\}$ とする。

$$\begin{aligned} \delta_i(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) \\ \sigma_j(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

と定めればこれは cosimplicial space となる。

[例 2]

特異チェイン複体は simplicial chain complex である。実際、 X を位相空間として、

$$S_n(X) = k[\omega : \Delta^n \rightarrow X]$$

であり、

$$\begin{aligned} d_i \omega &: \Delta^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \Delta^n \rightarrow X \\ s_j \omega &: \Delta^{n+1} \xrightarrow{\sigma_j} \Delta^n \rightarrow X \end{aligned}$$

である。微分は $d = \sum (-1)^i d_i$ によって与えられるのであった。

[例 3]

\mathcal{C} を小圏とする。

$$\text{Mor}_n \mathcal{C} = \{C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0 \mid C_i \in \text{Ob} \mathcal{C}, f_i \in \text{Mor} \mathcal{C}\}$$

を n -simplex とし、

$$\begin{aligned} d_0(C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0) &= C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_2} C_2 \xleftarrow{f_1} C_1 \\ d_i(C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0) &= (C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots C_{i+1} \xleftarrow{f_i f_{i-1}} C_{i-1} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0) \\ d_n(C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0) &= C_{n-1} \xleftarrow{f_{n-2}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0 \\ s_j(C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0) &= C_n \xleftarrow{f_{n-1}} \dots \leftarrow C_j \xleftarrow{\text{id}_{C_j}} C_j \leftarrow \dots \xleftarrow{f_1} C_1 \xleftarrow{f_0} C_0 \end{aligned}$$

によって simplicial set になる。これを $\mathcal{B.C}$ と書き、小圏 \mathcal{C} の nerve という。

2 幾何学的実現

X を simplicial set、 Δ を [例 1] で与えられる cosimplicial set とする。このとき、
定義 2

X の幾何学的実現 $|X|$ を次のように定義する。

$$|X| = \bigcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim$$

ここで \sim は $(x, \phi^*(u)) \sim (\phi_*(x), u)$ が生成する同値関係である。 □

このとき、 $|-|$ は simplicial object のなす圏から位相空間の圏への関手
($|-| : (\mathbf{Simp}) \rightarrow \mathbf{Top}$) だと思える。この操作は、 X_0 を頂点の集合、 X_1 を辺の集合、 X_2 を面の集合、、、と見たときに、それぞれの元を ϕ によって貼り合わせたものだと思うことができる。

[例 3] の $\mathcal{B.C}$ の実現を $|\mathcal{B.C}| = \mathcal{BC}$ と書き、小圏 \mathcal{C} の分類空間と呼ぶ。

X を simplicial set とするとき、次が成り立つ。

定理 2

$$H_*(k[X]) \cong H_*(|X|, k)$$

□

ただし、左辺は $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ によって与えられる微分である。

参考文献

- [1] Jean-Louis Loday : Cyclic Homology, Springer(1998), Appendix B.
- [2] John D.S. Jones : Cyclic homology and equivariant homology, Invent.math.87,403-423(1987).
- [3] Paul G. Goerss, John F.Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Modern Birkhäuser Classics(2009)

\mathbb{Z} -彩色可能絡み目の最小彩色数

日本大学大学院 総合基礎科学研究科 博士2年 松土恵理

最も有名な結び目不変量の1つに Fox が導入した Fox n -彩色（または単に n -彩色）がある [1].

L を絡み目, D を L の正則射影図式とする. 写像 $\gamma : \{\text{arcs of } D\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が, D の任意の交点において, 上側を通る弧を a , 下側を通る弧を b と c としたとき, $2\gamma(a) = \gamma(b) + \gamma(c)$ を常に満たすとする. このとき, γ を D の \mathbb{Z} -彩色と呼ぶ. また全ての弧に対応する値が等しい \mathbb{Z} -彩色を自明な \mathbb{Z} -彩色という. 絡み目 L が, 非自明な \mathbb{Z} -彩色を許容する図式をもつとき, L は \mathbb{Z} -彩色可能という.

注意 1. 絡み目 L が \mathbb{Z} -彩色可能であるための必要十分条件は, L の行列式 $\det(L)$ が 0 であることが知られている. 一方で結び目の行列式は必ず奇数であることから任意の結び目は \mathbb{Z} -彩色可能ではない.

ある \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目 L に対して, L の図式が許容する自明でない \mathbb{Z} -彩色 γ の $\text{Im}(\gamma)$ の最小位数を最小彩色数と呼び, $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L)$ と表す.

この記号はもともと, Harary-Kauffman が n -彩色に対して, 導入したものである [2].

まず以下のことは比較的容易にわかる.

命題 1. \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目 L が非分離ならば, $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) \geq 4$ である.

特に, その \mathbb{Z} -彩色を観察すると, 以下の性質をみたす特徴的なものであることがわかる. そこで, 次のような定義を導入する.

定義 1. \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目を L とし, γ を L の図式 D が許容する \mathbb{Z} -彩色とする. このとき, ある正の整数 d が存在して, D の各交点での上弧の γ の値と下弧の γ の値の差が d か 0 となっているとき, γ を単純 \mathbb{Z} -彩色という.

昨年この単純 \mathbb{Z} -彩色を許容する絡み目について, 最少彩色数を 4 であることを示すことができた. 更に [3] では絡み目の性質により最少彩色数が 4 であることを示していたが, 今回それらの一般化として次の結果が得られた.

定理 1. 非分離な絡み目 L が \mathbb{Z} -彩色可能であるならば, $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ である.

これは任意の非分離な \mathbb{Z} -彩色可能絡み目に対して最少彩色数が決定したことになる. またこの結果はほぼ同時期に [4] においても証明されているが, 本研究

とは独立して得られている。本研究における証明では、図式の任意の交点の下弧と上弧の差を R-move によって単純 \mathbb{Z} 彩色を許容する図式に変形できることを示している。

ただしこの証明では、実際に行うととても複雑な図式となる。しかし絡み目の性質によってはより単純な証明を与えることができる。例えば結び目や絡み目を平行化して得られた絡み目は \mathbb{Z} -彩色が可能であり、前述の定理より最少彩色数は 4 である。その証明はもとの図式の各交点から得られた交点たちに着目して適切な彩色をすることで得られる。この時 R-move を行う回数は前述の定理よりもはるかに少なく、より単純な図式での証明が可能である。

今後の課題として、今回得られた定理の証明の改良と、結び目の性質によるより単純な証明を与えることを挙げておく。また $\det(L) = 1$ となる（つまり Fox n -彩色、 \mathbb{Z} -彩色が定義されない）結び目や絡み目についても考えていきたい。

References

- [1] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 120–167, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] F. Harary and L. H. Kauffman, Knots and graphs. I. Arc graphs and colorings, *Adv. in Appl. Math.* **22** (1999), no. 3, 312–337.
- [3] K. Ichihara and E. Matsudo, Minimal coloring number for \mathbb{Z} -colorable links, *J. Knot Theory Ramifications* **26** (2017), no. 4, 1750018, 23 pp.
- [4] M. Zhang, X. Jin, and Q. Deng, The Minimal Coloring Number Of Any Non-splittable \mathbb{Z} -colorable Link Is Four, preprint, arXiv:1706.08837.

曲率次元からの帰結と応用

小林 慎一郎

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 修士 1 年

1 はじめに

測度距離空間上に、「Ricci 曲率が下から抑えられている」という状況が定義される。これは、最適輸送理論の言葉を用いて定式化される。Riemann 多様体の枠を超える空間にこのような曲率概念を一般化することは重要である。このことについて、少し説明したい。Alexandrov は、一般の length space に対して「断面曲率が下から実数 K で抑えられている」ということを定義した。任意の $K \in \mathbb{R}, D > 0, n \geq 2$ に対して、断面曲率が K 以上、直径が D 以下、次元が n であるようなコンパクト length space 全体の等長類は Gromov-Hausdorff 収束に関してコンパクト集合になる。Riemann 多様体の中だけで考えていては「閉」であることが出ない。それでは、断面曲率より弱い曲率概念である Ricci 曲率で、上と同じようなことはできないだろうか、という疑問が生じる。これに答えを与えてくれるのがタイトルにある曲率次元条件である。これは最適輸送理論を用いて定義されるので、その説明から入る。

2 最適輸送理論

最適輸送理論では、次のような問題を考える。砂場 X から砂場 Y へ砂を運びたい。 X と Y にはそれぞれ分布 μ, ν が与えられているとし、地点 x から位置 y へ砂を運ぶのに単位当たり $c(x, y)$ のコストがかかるとする。砂の移動 $T: X \rightarrow Y$ の前後で砂はこぼれたり増えたりしないとする。すなわち、地域 $B \subset Y$ に入ってくる砂の量と地域 $T^{-1}(B)$ から運ばれる砂の量は等しいとする。数式で表すと、

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)) \quad (B \subset Y)$$

となる. この条件を満たす T を輸送写像と呼ぶことにする. 輸送写像 T に関する総コストを $C[T] = \int_X c(x, T(x))d\mu(x)$ とおく. このとき, $C[T]$ を最小にするような輸送写像 T_0 を求めたい. このタイプの問題を Monge の問題という. Monge の問題は自然だが, そもそも輸送写像が存在しない場合があり, いつでも意味を持つわけではないことに注意する. ロシアの数学者・経済学者 Kantorovich は Monge の問題を解く際に重要なアイデアを提唱した. Kantorovich は, 最適輸送『写像』を求めるのではなく, 最適輸送『計画』を求める問題に置き換えた. これについて説明する. 輸送計画 π とは, μ と ν の周辺分布である. 輸送計画も移動の前後で砂の量の増減がないことを言っている. 輸送写像との違いは, インフォーマルな言い方をすると, 写像の方は砂を分けて別のところに運ぶのを許さないが, 計画の方はそれを許す. 輸送計画 π に関する総コストを $C[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y)d\pi(x, y)$ とする. このとき, $C[\pi]$ を最小にするような π_0 を求めたい. このタイプの問題を Kantorovich の問題という. どのような問題を考えるかを説明したところで, 記号を用意する.

Notation . まず, 問題を考える枠組みとして, 空間といたら可分完備距離空間とし, 測度といたら Borel 確率測度とする. 距離空間 (X, d) 上の Borel 確率測度全体の集合を $\mathcal{P}(X, d)$ と表す. X 上の確率測度 μ と Y 上の確率測度 ν が与えられているとき, そのカップリング全体の集合を $\Pi(\mu, \nu)$ と表す. すなわち,

$$\Pi(\mu, \nu) = \{ \pi \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid \pi(A \times Y) = \mu(A), \pi(X \times B) = \nu(B) \ (A \subset X, B \subset Y) \}$$

とおく. また, 完備 Riemann 多様体の距離は常に測地距離を考える.

Kantorovich の問題は, コスト関数 c と分布 $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ が与えられたとき, 総コスト汎関数 $C[\pi]$ (π は μ と ν のカップリング) を最小化せよ, という変分問題であった. 直接法を用いることにより, 次が示される.

Theorem 2.1. X, Y を可分完備距離空間, $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ とする. コスト関数 $c: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ は下半連続であるとする. このとき, Kantorovich の問題の解が少なくとも 1 つ存在する.

一般に, Kantorovich の問題の解は一意ではない. しかし, 空間が Euclid 空間, Riemann 多様体で, コスト関数が距離関数の 2 乗であるときには, Kantorovich の問題の解は一意であり, それが写像から誘導されることが知られている.

Theorem 2.2 (Brenier, McCann, Figgali and Gigli). M を完備 Riemann 多様体, $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(M)$ とし, μ_0 は Riemann 体積測度に関して絶対連続であるとする. コスト関数 $c(x, y) = \frac{1}{2}d^2(x, y)$ に対して, Kantorovich の問題はただ一つの解 π_0 をもつ. さらにこの π_0 について, ある写像 $T: M \rightarrow M$ が存在して, $\pi_0 = (\text{id}, T)_*\mu_0$ と書ける. この T について, ある半凹関数 $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $T = \nabla\phi(\mu_0\text{-a.e.})$ と書ける.

Remark 2.3. この定理は, Euclid 空間の場合に Brenier によって, 完備 Riemann 多様体で測度がコンパクト台をもつときに McCann, そして定理 2.2 の仮定の場合に Figgali, Gigli によって示された.

可分完備距離空間 (X, d) が与えられたとき, コスト関数 $c: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ として, 距離関数 d の p 乗 ($p \geq 1$) を考える. $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X, d)$ に対して, μ と ν の最適コストを対応させることで, $\mathcal{P}(X, d)$ 上に “距離” が定まる. この値は無限大になるかもしれないので, 通常の意味の距離ではないが, p 次モーメントが有限なものに制限すれば通常の意味で距離になる. ここで, 確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(X, d)$ の p 次モーメントが有限であるとは, ある $x_0 \in X$ が存在して, $\int_X d^p(x, x_0)d\mu(x) < +\infty$ となることである. p 次モーメントが有限な X 上の Borel 確率測度全体を $\mathcal{P}_p(X, d)$ と表す.

Proposition/Definition 2.4. (X, d) を可分完備距離空間, p を 1 以上の実数とする. $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X, d)$ に対して,

$$W_p(\mu, \nu)^p = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X^2} d^p(x, y)d\pi(x, y) \in [0, +\infty)$$

によって $W_p(\mu, \nu)$ を定める. W_p は $\mathcal{P}_p(X, d)$ 上の距離になる. W_p を p 次 Wasserstein 距離という. そして, 距離空間 $(\mathcal{P}_p(X, d), W_p)$ を p 次 Wasserstein 空間という.

Wasserstein 空間はもとの空間の幾何的性質を色濃く反映する. また, Wasserstein 空間の位相は測度の弱収束より強い.

3 曲率次元条件

曲率次元条件は, その 2 次 Wasserstein 空間上の汎関数のある種の凸性によって定義される. この汎関数は統計力学などで出てくるエントロピーに関係する. なお, ここでの曲率次元条件の定義は, Sturm の論文 [3],[4] による. 定義の際に用いられる記号を用意する.

Notation . $\kappa \in \mathbb{R}$ とする. 次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u'' + \kappa u = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases}$$

を満たす唯一解 $u = u(t)$ を \mathfrak{s}_κ とおく. また, $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty), t \in [0, 1]$ に対して,

$$\sigma_{K,N}^{(t)}(\theta) = \frac{\mathfrak{s}_{K/N}(t\theta)}{\mathfrak{s}_{K/N}(\theta)} \quad (\theta \geq 0),$$

$$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta) = t^{1/N} \sigma_{K,N-1}^{(t)}(\theta)^{1-1/N} \quad (\theta \geq 0)$$

とおく.

Definition 3.1 (相対エントロピー). (X, d, \mathfrak{m}) を測度距離空間とする. 各 $\mu \in \mathcal{P}_2(X, d)$ に対して,

$$\text{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) = \begin{cases} \int_X \rho \log \rho d\mathfrak{m} & \text{if } \mu = \rho \mathfrak{m}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定める. $\text{Ent}_{\mathfrak{m}}$ を \mathfrak{m} に関する μ の相対エントロピーという.

相対エントロピー汎関数の K 凸性によって定義される条件が曲率次元条件 $\text{CD}(K, \infty)$ である.

Definition 3.2. (X, d, \mathfrak{m}) を測度距離空間, K を実数とする.

(X, d, \mathfrak{m}) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, \infty)$ を満たすとは, 任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, d, \mathfrak{m})$ に対して, μ_0 と μ_1 を結ぶ Wasserstein 測地線 $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が存在して,

$$\text{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \leq (1-t) \text{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t \text{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \frac{K}{2} t(1-t) W_2(\mu_0, \mu_1)^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つこと、と定義する。ただし、 ρ_i は μ_i の \mathbf{m} に関する密度関数である。

曲率次元条件 $\text{CD}(K, \infty)$ は、次元の条件を考慮していない (これは後でわかる)。より精密に、次元の上限も考慮した曲率次元条件が $\text{CD}(K, N)$ である。

Definition 3.3 (Rényi エントロピー). (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, $N \geq 1$ とする。各 $\mu \in \mathcal{P}_2(X, d)$ に対して、 $\mu = \rho \mathbf{m} + \mu_s$ と Lebesgue 分解したとき、

$$S_{N, \mathbf{m}}(\mu) = - \int_X \rho^{-1/N} d\mu$$

と定める。 $S_{N, \mathbf{m}}$ を \mathbf{m} に関する N -Rényi エントロピーという。

Definition 3.4. (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, K を実数, N を 1 以上の実数とする。 (X, d, \mathbf{m}) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすとは、任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, d, \mathbf{m})$ に対して、最適輸送計画 $\pi \in \text{Opt}(\mu_0, \mu_1)$ と μ_0 と μ_1 を結ぶ Wasserstein 測地線 $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が存在して、すべての $N' \geq N$ に対して

$$S_{N', \mathbf{m}}(\mu_t) \leq - \int_{X^2} \left[\tau_{K, N'}^{(1-t)}(d(x, y)) \rho_0^{-1/N'}(x) + \tau_{K, N'}^{(t)}(d(x, y)) \rho_1^{-1/N'}(y) \right] d\pi(x, y) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つこと、と定義する。ただし、 ρ_i は μ_i の \mathbf{m} に関する密度関数である。

曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ ($K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty]$) は、Riemann 多様体の「Ricci 曲率が K 以上、次元が N 以下」を復元する。

Theorem 3.5 ([4]). M を完備 Riemann 多様体とする。 M を、標準的な方法で測度距離空間と見なす。このとき、 M が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすことと、 M の Ricci 曲率が K 以上かつ M の次元が N 以下であることは同値である。

これで、測度距離空間に対して、「Ricci 曲率が下から抑えられていて、次元が上から抑えられている」という条件として曲率次元条件が良いものであることがわかった。次に、曲率次元条件自体から導かれる帰結を述べる。中には Riemann 多様体に対する定理の測度距離空間バージョンが出てくる。

Theorem 3.6 (Brunn-Minkowski の不等式). (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, $K \in \mathbb{R}, N \in [0, \infty)$ とする。 $A_0, A_1 \subset X$ を Borel 集合で $\mathbf{m}(A_0), \mathbf{m}(A_1) > 0$ だとす

る. $0 \leq t \leq 1$ に対して A_t を A_0 と A_1 の t 中点集合とする. すなわち,

$$A_t = \{y \in X \mid \exists(x_0, x_1) \in A_0 \times A_1 \text{ s.t. } d(x_0, y) = td(x_0, x_1), d(y, x_1) = (1-t)d(x_0, x_1)\}$$

とおく. さらに, Θ を A_0 と A_1 の最小/最大距離とする. すなわち,

$$\Theta = \begin{cases} \inf_{x_0 \in A_0, x_1 \in A_1} d(x_0, x_1) & \text{if } K \geq 0, \\ \sup_{x_0 \in A_0, x_1 \in A_1} d(x_0, x_1) & \text{if } K < 0 \end{cases}$$

とおく. (X, d, \mathbf{m}) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすならば,

$$\mathbf{m}(A_t)^{1/N} \geq \tau_{K,N}^{(1-t)}(\Theta)\mathbf{m}(A_0)^{1/N} + \tau_{K,N}^{(t)}(\Theta)\mathbf{m}(A_1)^{1/N}$$

が成り立つ.

Corollary 3.7 (Bishop-Gromov の不等式). (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ とする. 各 $x_0 \in \text{supp } \mathbf{m}$ に対して, $v(r) = \mathbf{m}(\bar{B}_r(x_0)), s(r) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{m}(\bar{B}_{r+\delta}(x_0) \setminus B_r(x_0))/\delta$ とおく. (X, d, \mathbf{m}) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすならば, 有界集合の測度は有限で, 任意の $0 < r \leq R \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$ (これは $K > 0$ のときの条件であり, $K \leq 0$ のときの条件は $R < +\infty$) に対して,

$$\frac{s(r)}{s(R)} \geq \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}^{N-1}(r)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}^{N-1}(R)},$$

$$\frac{v(r)}{v(R)} \geq \frac{\int_0^r \mathfrak{s}_{K/(N-1)}^{N-1}(t)dt}{\int_0^R \mathfrak{s}_{K/(N-1)}^{N-1}(t)dt}$$

が成り立つ.

Corollary 3.8. (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ とする. (X, d, \mathbf{m}) が $\text{CD}(K, N)$ を満たすならば, $\text{supp } \mathbf{m}$ の Hausdorff 次元は高々 N である.

Corollary 3.9 (Bonnet-Myers 型の直径評価). (X, d, \mathbf{m}) を測度距離空間, $K > 0, N \in [1, \infty)$ とする. (X, d, \mathbf{m}) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすならば,

$$\text{diam}(\text{supp } \mathbf{m}) \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] 桑江一洋, 塩谷隆, 太田慎一, 高津飛鳥, 桑田和正, 最適輸送理論とリッチ曲率, 数学メモアール第8巻 (2017), 日本数学会.
- [2] J.Lott and C. Villani, “Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport,” *Ann. of Math (2)* 169 (2009), no.3, 903-991.
- [3] K-T. Strum, “On the geometry of metric measure spaces I,” *Acta Math.* 196(2006), no. 1, 65-131.
- [4] —, “On the geometry of metric measure spaces II,” *Acta Math.* 196(2006), no. 1, 133-177.
- [5] C. Villani, “Optimal transport, old and new,” *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*(2009), vol. 338, Springer-Verlag.

Enhanced Decorated Teichmüller Space

三口 雄大

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士 2 年

標識付き双曲曲面の空間である Teichmüller 空間はカスプや境界に情報を与えた曲面の空間としての様々な拡張を持ち、それらは理想三角形分割によって定まる大域的な座標を持つことが知られている。曲面のそのような情報をあわせ持つさらに拡張された Teichmüller 空間を定義して、同様なパラメータ付けができるか調べる。

S をコンパクトな境界付き曲面から有限個の点を除いたものとする。除かれた点のうち、曲面の内部にあるものを穴、境界上にあるものをスパイクとよぶ。

定義 1. (enhanced Teichmüller 空間)

有限面積でカスプ、閉測地線境界、無限測地線境界を持つことを許した S と同相な標識付き双曲曲面で閉測地線境界それぞれに符号を与えたもの全体の空間を S の enhanced Teichmüller 空間といい、 $\mathcal{T}^x(S)$ と表す。

定義 2. (decorated Teichmüller 空間)

有限面積でカスプ、無限測地線境界を持つことを許した S と同相な標識付き双曲曲面でカスプ、スパイクそれぞれにホロサイクルを与えたもの全体の空間を S の decorated Teichmüller 空間といい、 $\mathcal{T}^a(S)$ と表す。

ただし、上の定義において閉測地線境界は境界曲線を曲面に含めず、無限測地線境界は境界曲線を曲面に含めるものとする。これは、閉測地線境界を S の穴と対応させるための要請で、必要があれば双曲曲面を完備化して境界曲線を曲面に含めると考えることもある。

カスプを閉測地線境界の退化として見るとき、それに付随したホロサイクルは境界からの等距離曲線の退化として得られる。このことから、2 つの Teichmüller 空間の自然な拡張を次で定義する。

定義 3. (enhanced decorated Teichmüller 空間)

有限面積でカスプ、閉測地線境界、無限測地線境界を持つことを許した S と同相な標識付き双曲曲面で閉測地線境界それぞれに符号と等距離曲線を与えて、カスプ、スパイクそれぞれにホロサイクルを与えたもの全体の空間を S の enhanced decorated Teichmüller 空間といい、 $\mathcal{T}(S)$ と表す。

Γ を S の穴とスパイクを頂点とした三角形分割とする。このとき、 Γ は S の Teichmüller 空間に属する双曲曲面の理想三角形分割と見なせる。 Γ の辺のうち S の内部にあるものを内部辺といい、 Γ の辺全体を $E(\Gamma)$ 、内部辺全体を $\text{int}E(\Gamma)$ で表す。

$\mathcal{T}^x(S)$ は Γ の各内部辺での剪断をとることで $\mathbb{R}^{\#\text{int}E(\Gamma)}$ と同相となり、 $\mathcal{T}^a(S)$ は Γ の各辺での λ -長さをとることで $\mathbb{R}^{\#E(\Gamma)}$ と同相となることが知られている。剪断とはその辺での理想三角形の貼り合わせの符号付き長さのことであり、 λ -長さとはその辺の両端をホロサイクルで切り取った測地線の符号付き長さのことである。

$\mathcal{T}(S)$ も剪断、 λ -長さ、そして各穴の符号付き境界長さをとることで同じようにパラメータをとることができる。ただし、カスプの境界長さは 0 とみなし、辺の端点が閉測地線境界に対応している

場合は λ -長さをとるとき辺を等距離曲線で切り取っているものとする。境界長さと剪断, λ -長さと剪断には関係があるので, このパラメータ表示は一对一ではなく, 素朴に次の命題を考えることができる。

命題 4. 境界長さと λ -長さをとる対応によって, $\mathcal{T}(S)$ は $\mathbb{R}^{\#E(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{\#P}$ と同相である。ただし, P は S の穴全体を表す。

剪断が決定すれば標識付き双曲曲面が定まり, そのもとで λ -長さからホロサイクルと等距離曲線が定まるので, $\mathcal{T}(S)$ への逆対応ができる。よって, 境界長さと剪断, λ -長さと剪断の関係を表す方程式を剪断について解くことが, 逆対応を構成する十分条件である。全ての辺が1つのスパイクに少なくとも一方の端点を持つような三角形分割を考えると, 与えられた境界長さと λ -長さから剪断を得る方程式が簡単に解けるので, 次がいえる。

補題 5. S が1つ以上のスパイクを持つとき, 上の命題が成り立つような S の三角形分割を構成することができる。

また, フリップとよばれる三角形分割のとりかえにおける基本的な変形の前後で λ -長さパラメータの対応が一对一であることから, 次がいえる。

補題 6. 上の命題が成り立つかどうかは S の三角形分割によらない。

ゆえに, S が1つ以上のスパイクを持つという仮定は $\mathcal{T}(S)$ が大域的な座標を持つことの十分条件である。

定理 7. S が1つ以上のスパイクを持つとき, $\mathcal{T}(S)$ は $\mathbb{R}^{\#E(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{\#P}$ と同相である。

参考文献

- [1] V. V. Fock, A. B. Goncharov : Dual Teichmüller and lamination spaces, Handbook of Teichmüller Theory Volume1,647-683
- [2] R. C. Penner : Decorated Teichmüller Theory of Bordered Surface, Analysis and Geometry Volume12 Number4(2004), 793-820.

空間グラフのトポロジーについて

東京女子大学大学院 理学研究科 数学専攻 M1

森下 央子

定義 1. (グラフ)

$V (\neq \emptyset), E$: 集合, $\psi : E \rightarrow V \times V / \sim$: 写像 (\sim は $(u, v) \sim (v, u)$ による同値関係)

(1) 3つ組 $G = (V, E, \psi)$ をグラフといい, 特に, $V = V(G), E = E(G), \psi = \psi_G$ と表す.

(2) $V(G)$ の元を G の頂点といい, $E(G)$ の元を G の辺という. また, ψ_G を G の接続関数という.

定義 2. (空間グラフ)

グラフ $(V(G), E(G), \psi_G)$ を, 各辺を線分と考えて接続関数に沿って各頂点に接着することで, 自然に位相空間とみなす. このとき, 埋め込み $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を G の空間埋め込みといい, その像 $f(G)$ を G の空間グラフという. 特に G が円周(の非交和)に同相のとき, $f(G)$ を結び目(絡み目)という.

各辺に向きの入った空間グラフ(結び目, 絡み目)の図式において, P をその交差点の1つとする. このとき, P での符号 $\varepsilon(P)$ を図1で定義する.

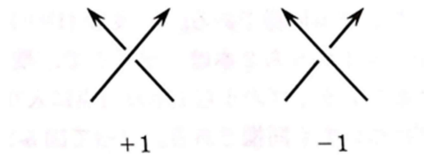


図 1

定義 3. (絡み数)

$L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分有向絡み目とする. P を L の図式における K_1 と K_2 の間の交差点とすると,

$$lk(L) = lk(K_1, K_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_P \varepsilon(P)$$

を L の絡み数という. これは整数値の不変量である.

定義 3. (Simon 不変量)

完全グラフ K_5 と完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の辺に図 2 のような向きを与える.

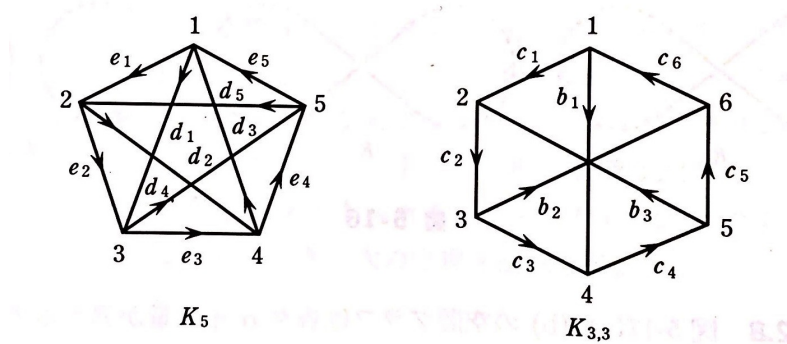


図 2

$G = K_5$ または $K_{3,3}$ とするとき, G の隣接していない 2 辺 x, y に対して次のように符号 $\varepsilon(x, y) = \varepsilon(y, x)$ を定める.

• $G = K_5$ のとき :

$$\varepsilon(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (e_i, e_j) \\ -1 & (x, y) = (e_i, d_j), (d_i, d_j) \end{cases}$$

• $G = K_{3,3}$ のとき :

$$\varepsilon(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (c_i, c_j), (b_k, b_l) \\ 1 & (x, y) = (c_i, b_k) \quad (c_i \parallel b_k) \\ -1 & (x, y) = (c_i, b_k) \quad (c_i \nparallel b_k) \end{cases}$$

空間埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, G の隣接しない 2 辺 x, y について, $f(G)$ の図式における $f(x), f(y)$ の間の交差点の符号の和を $l(f(x), f(y))$ とする. このとき,

$$L(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \cap y = \emptyset} \varepsilon(x, y) l(f(x), f(y))$$

を, f の **Simon 不変量** という. これは奇数値の不変量である.

一般のグラフ G については, 絡み数及び **Simon 不変量** を一般化した **Wu 不変量** と呼ばれる空間グラフの不変量が知られている. これは G の配置空間のコホモロジー類として与えられるもので, 現在, この不変量を理解するためにコホモロジー論を基本から勉強しているところである.

参考文献

- [1] 小林 一章, 空間グラフの理論, 培風館, 1995.
- [2] 柘田 幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店, 2002.

rep-cube について

東工大理学院数学系修士 2 年
高村侑樹

rep-cube は Solomon W. Golomb による polyomino と rep-tile という 2 つの概念に着想を得て上原隆平と Martin L. Demaine らによって研究され始めたものである。今回はその概要と、種々の未解決問題を紹介する。

1 rep-cube の定義

定義 1 polyomino とは、いくつかの単位正方形を辺でつなぎ合わせることで得られる連結な多角形である。

polyomino の例を図 1 に示す。

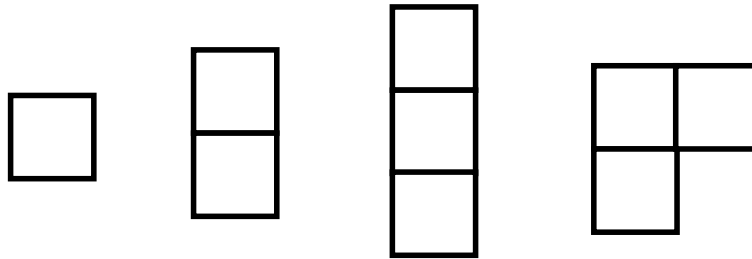


図 1 正方形 3 個までで作られる polyomino

この polyomino について次の問が考えられる；

問 1 立方体の展開図であるような polyomino をいくつかの polyomino に分割し、それらすべてを立方体の展開図とすることはできるか？

この問の解となるものを **rep-cube**^{*1}といい、特に分割後の展開図がすべて同じサイズの立方体になるような rep-cube を正則な **rep-cube** と呼ぶ。この問に対する答えは試行錯誤的にいくつか発見されているが、次の問に対する明確な解答は得られていない；

問 2 位数 n の正則な rep-cube が存在するための n に関する必要十分条件を求めよ。ここで位数 n の rep-cube とは n 個の立方体の展開図に分割される rep-cube のことをいう。

^{*1} rep-tile の立方体版として命名された。rep-tile とは自己相似な同サイズのいくつかの図形に分割可能な多角形のことである。

2 rep-cube に関する種々の問題

正則な rep-cube に関して次のような定理が知られている；

定理 1 $g \in \{2, 4, 5, 8, 10, 50\}$ に対し、位数 g の rep-cube が存在する。また、自然数 k に対し、位数 $36gk^2$ の正則な rep-cube が存在する。

この定理は試行錯誤によって発見されたパターンの組み合わせにより導かれる。これにより正則な rep-cube が無限に存在することが導かれる。定理 1 は正則な rep-cube が存在する n についての定理であるが、正則な rep-cube が存在しない n に関するいくつかの条件が知られている。たとえば、位数 3 の rep-cube は存在しない。

非正則な rep-cube に対しては次のような問が考えられる；

問 3 ピタゴラス数による rep-cube は存在するか。たとえば $5 \times 5 \times 5$ の立方体を分割することで $3 \times 3 \times 3$ の立方体と $4 \times 4 \times 4$ の立方体を得ることができるか。

この問題に対しては具体的な場合でも 2 分割での解答は知られていない。しかし 5 分割すれば可能であることが $(3, 4, 5)$ の場合に対して知られている。

3 参考文献

参考文献

- [1] Z. Abel et al. *Unfolding and Dissection of Multiple Cubes*. in Abstracts from the 19th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (JCDCGGG 2016), Tokyo, Japan, September 2–4, 2016, to appear.
- [2] Solomon W. Golomb. *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*. Princeton Univ., 1996

ヒルベルト幾何の紹介

青山 昂頌

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

平成 29 年 7 月 18 日

1 ヒルベルト幾何の定義

まず、ユークリッド空間の場合について述べる。ヒルベルト幾何とはユークリッド空間の、空ではない有界開凸部分集合 C と、次の方法で定めた C 上の距離関数 d との組 (C, d) のことである。

C 上の異なる 2 点 p, q に対して、直線 pq と C との交点を各々 a, b とする。但し、点 a の方を点 p から点 q へ向かう半直線と C との交点とする。このとき、

$$d(p, q) = \log \frac{|ap||bq|}{|aq||bp|}.$$

但し、 $|xy|$ は 2 点 x, y のユークリッド距離とする。また p と q が同じ点であるときは、 $d(p, q) = 0$ と定める。

実はこの d の定義は「線分 pa は線分 pq を何倍したものか」、「線分 qb は線分 qp を何倍したものか」という量にのみ依存しているので、ユークリッド距離が与えられていなくとも d を定義できる。また、直線 ab を実数から線形空間への写像とみれば、「凸集合 C が有界開集合である」という条件を「 C の直線 ab による引き戻しが実数直線の有界開区間になっている」という条件に書き換えることによって、ヒルベルト幾何の定義を一般の無限次元を含めた線形空間に拡張することができる。

2 ヒルベルト幾何と他分野との関係

2.1 ヒルベルト幾何とポアンカレディスク

ヒルベルト幾何の一つの例として、2次元ユークリッド空間上の原点中心の単位円盤 D を上の定義においての C としたものを、 (D, d) を考える。このとき、 (D, d) はポアンカレディスク (D, ρ) との間、次の等長変換 Φ をもつ。

$$\Phi(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}}.$$

但し、 D を複素平面上の単位円盤と同一視した。

特徴的なのは (D, d) における測地線が直線となっていることである。また、 Φ により、ヒルベルト幾何はポアンカレディスクの 1 つの一般化と考えられる。

2.2 錐と Perron-Frobenius の定理

ヒルベルト幾何は実線形空間の、ある錐上に定められる擬距離空間において、錐の切断面を見たものとも思える。詳しくは、 K を錐として、 K 上の 2 点 p, q に対して次の擬距離 d を定める。

$$d(p, q) = \log \frac{M(p, q)}{m(p, q)}$$

$$M(p, q) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \lambda q - p \in K\}, m(p, q) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid p - \lambda q \in K\}.$$

この錐上の擬距離は原点を通る半直線上の 2 点を同一視することによって距離となる。そこで、この同値関係の完全代表系として錐の横向き切断面をとると、その切断面上のヒルベルト幾何とこの距離は一致することが分かる。この見方によって次の定理は完備距離空間上の縮小写像の原理と思える。

定理 (Perron-Frobenius) ¹ A を n 次元ユークリッド空間からそれ自身への線形写像で、勝手な 0 ではない、各成分が 0 以上であるベクトルはすべて A によって各成分が正となるものに写されるとする。このとき、各成分が正のベクトル x がとれ、任意の、各成分が 0 以上の非 0 のベクトルを A で繰り返し写したものは x の方向へ収束する。

3 ヒルベルト幾何の研究と horofunction compactification

最近の研究では無限次元のヒルベルト幾何の等長変換群の決定が行われています。その研究手法の 1 つとして、horofunction compactification という距離空間のコンパクト化があります。このコンパクト化は距離空間上の各点をその距離空間上の実数値関数と対応させることによって距離空間を関数空間に移して閉包をとるものです。これを調べるには関数解析の知識を必要とし論文を読むのが大変なのですが、horofunction compactification は一般の距離空間において定義されるもので、ヒルベルト幾何に限らず現在興味をもっているものの 1 つです。

参考文献

- [1] Athanase Papadopoulos, Marc Troyanov, Editors 『Handbook of Hilbert Geometry』 European Mathematical Society
- [2] Elon Kohlberg, John W. Pratt 『The Contraction Mapping Approach to the Perron-Frobenius Theory: Why Hilbert's Metric?』 Mathematics of Operations Research
- [3] Cormac Walsh 『Hilbert and Thompson Geometries Isometric to Infinite-Dimensional Banach Spaces』 arXiv:1610.07508v1

¹詳しくないですが、この定理は経済学での応用があるらしいです。

2次元双曲空間

小島 俊祐

日本大学総合基礎科学研究科地球情報数理科学専攻 修士1年

はじめに

今回は双曲幾何学について紹介します。3次元双曲空間を考える前の2次元双曲空間を定義し、どんな空間かを紹介します。

定義 (2次元双曲空間)

$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ という計量をもつ $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ を2次元双曲空間という。

\mathbb{H}^2 内の測地線 (距離を最小化した線分) は \mathbb{H}^2 の境界 $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \{x + iy | y = 0\}$ ちょうど直角に交わる線や円である。つまり、測地線は垂直な線からなっており、 \mathbb{C} の実軸と垂直に交わり、実軸上の中心を持つ半円である。

等長写像は計量を保つ、したがって道の長さや面積などが保たれる。 \mathbb{H}^2 の等長写像の群は測地線で上半分の平面の線対称移動 (反転) によって生成される。向きを保つ等長写像の群は $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ という群であり、一次分数変換として作用する。つまり、 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の元 A が

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で与えられて、そして $ad - bc = 1$ であるとき、 \mathbb{C} の元 Az は

$$Az = \frac{az+b}{cz+d}$$

で与えられる。

一次分数変換は円を円へ、線を線へ変換する。

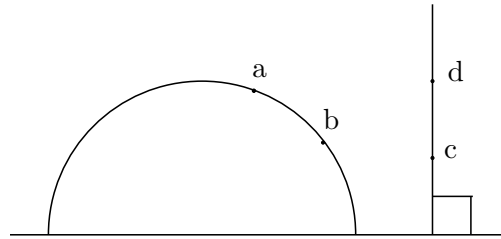
ある $\partial\mathbb{H}^2$ 内の3つの点 z_1, z_2, z_3 を与えられ、 z_1 を1へ、 z_2 を0へ、 z_3 を ∞ へ移す \mathbb{H}^2 の等長写像が存在する (exercise)。それは $\partial\mathbb{H}^2$ 上のある異なった3点がある異なった他の3点に移す \mathbb{H}^2 の等長写像が存在するに従う。

Example 3.1 長さの計算

\mathbb{H}^2 内の2点間の距離や線分の長さを計算します。計算する方針の1つは2点を移す等長写像をより単純な絵にあてはめることである。例えば、 a と b をそれぞれ c と d に移す等長写像を見つけなさい (c と d の実軸の座標は0であるとする)。実際、 c は $0 + i \in \mathbb{C}$ という点で d は $0 + it \in \mathbb{C}$ というある点であると考えることができる。

$0 + i$ と $0 + it$ の間の距離を計算する1つの方法は、 $s = 1$ から $s = t$ への道の長さ $\gamma(s) = (0 + is)$ を見つけることである。

$$\begin{aligned}\text{Dist}(a, b) &= \int_1^t \|\dot{\gamma}\|_{hyp} ds \\ &= \int_1^t \|\dot{\gamma}\|_{Eucl} \frac{1}{s} ds \\ &= \int_1^t \frac{1}{s} ds \\ &= \log(t)\end{aligned}$$



4次元多様体の Kirby 図式

浅野 喜敬*

以下では, X^n を向き付けられたコンパクト可微分 n 次元多様体とする.

1 Introduction

本発表では 4 次元多様体のハンドルの貼り合わせを示す Kirby 図式, またそのハンドル分解から定まる多様体が微分同相であるかどうか判定する技法, Kirby 計算について解説する.

2 多様体のハンドル分解

$h^k = D^k \times D^{n-k}$ を (n 次元の) k -ハンドル, $\{0\} \times D^{n-k}$ を *belt sphere* と呼ぶ. X^n に埋め込み $\varphi : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ で h^k を貼り合わせた多様体を $X^n \cup_{\varphi} h^k$ と書くこととする. φ を *attaching map*, $\varphi(\partial D^k \times \{0\})$ を φ の *attaching sphere* (特に $k = 2$ のときは *attaching circle*) と呼ぶ. 以降で K と書いた場合は *attaching circle* を意味するものとする.

定義 1. (多様体のハンドル分解)

多様体 X^n が有限個の k -ハンドル ($0 \leq k \leq n$) を貼り合わせて得られる多様体と微分同相のとき, X^n をハンドル分解可能という.

定理 2. [M]

任意の C^∞ 級閉多様体はハンドル分解可能である.

命題 3. [松本]

任意の C^∞ 級閉多様体 X^n はイソトピーにより次のような 0-ハンドルと n -ハンドルをただ 1 つとするハンドル分解を持つようにできる.

$$X^n = h^0 \cup h_1^1 \cup \cdots \cup h_{i_1}^1 \cup h_1^2 \cup \cdots \cup h_{i_2}^2 \cup \cdots \cup h_1^{n-1} \cup \cdots \cup h_{i_{n-1}}^{n-1} \cup h^n.$$

この命題により, X^4 はつぎのようなハンドル分解を持つと仮定して良い.

$$X^4 = h^0 \cup h_1^1 \cup \cdots \cup h_k^1 \cup h_1^2 \cup \cdots \cup h_l^2 \cup h_1^3 \cup \cdots \cup h_m^3 \cup h^4.$$

$0 \leq k \leq n$ なる整数 k に対して, X^n の k 以下の指数を持つすべてのハンドルの和集合を X_k と表し, これを k -ハンドルボディと呼ぶことにする. X_k は X^n の部分多様体になる. また, ハンドル分解より与えられる多様体は次の 3 つの操作で微分同相型をかえない [松本].

* 東北大学理学研究科数学専攻修士 1 年, E-mail : nobutakaasano@gmail.com

定義 4. (ハンドルスライド)

k -ハンドルの attaching sphere を貼り合わされている $(k - 1)$ -ハンドルボディの境界上で attaching map のイソトピーによって attaching sphere を変形し、 k -ハンドルを動かす操作のこと。

定義 5. (ハンドルの消去)

2つのハンドルの一方の attaching circle ともう一方の belt sphere が1点で横断的に交叉しているとき、それらのハンドルをハンドル分解から取り除く操作のこと。

定義 6. (ハンドルの創出)

ハンドルの消去が起きるハンドルの組を加えて新しいハンドル分解を作る操作のこと。

さて、多様体の微分同相型を見ていこう。次の命題により、ハンドルの attaching map のイソトピー類を決定すれば X^n の微分同相型を決定することができる。

命題 7. [GS]

h を k -ハンドル、 φ, φ' を attaching map とする。このとき、 φ と φ' がイソトープならば $X^n \cup_{\varphi} h \simeq X^n \cup_{\varphi'} h$ である。

また、次の定理が成り立つことが知られている。

命題 8. [LP]

閉4次元多様体は2ハンドルまでの attaching map で微分同相型が決定される。

では2ハンドルの attaching map を見ていこう。

3次元の場合では、2ハンドルの attaching map のイソトピー類は、attaching circle $\varphi(S^1 \times \{0\}) \subset \partial X_1$ で決定される。しかし4次元の場合はこれだけでは決定できない。

4次元の場合では、2ハンドルの attaching map のイソトピー類を決定するために、attaching circle だけでなく「回転」の部分の自由度を記述する概念が必要である。これが次に述べる framing である。

命題 9. [GS]

φ のイソトピー類は次の2つを決めるごとに一つ定まる。

- 1 φ の attaching circle K
- 2 $K \subset \partial X_1$ の法バンドルの枠 ν

組 (K, ν) を φ の framing と呼ぶ。

以上より、4次元多様体の微分同相型は2ハンドルの framing を決定することで一意に定まることが分かる。Kirby 図式とは、この framing の情報を ∂X_1 に「書き表した」ものである。

3 (特別な場合の)framing の計算

X^4 が 1-ハンドルと 3-ハンドルを持たないとき, framing は linking number を用いて特徴づけることができる. $X^4 = h^0 \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_l^2 \cup h^4$ を X^4 のハンドル分解とする.

命題 10. [GS]

(K_i, ν_i) を h_i^2 の framing とする. K_i の向きは便宜的に与えておく. このとき, K_i を ν_i の一つの方向にスライドさせた結び目を K'_i とすると (向きは K_i と平行と定める), K_i と K'_i の linking number が定まる. この linking number により ν_i のイソトピー類が指定される.

この命題より, 1-ハンドルと 3-ハンドルを持たない 4 次元多様体の場合は, framing の「枠の自由度」の情報が linking number より得られることがわかる. この整数を K の framing 係数と呼ぶ.

4 Kirby 図式

Kirby 図式とは, X_0 (つまり 0-ハンドル) の境界である S^3 に貼られてる 1-ハンドルと 2-ハンドルの位置を示した図式である. S^3 を $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ と同一視して, 1-ハンドルの attaching sphere $D^3 \sqcup D^3$ を面対称に書く. そこに 2-ハンドルの attaching circle を書き込んだものが Kirby 図式である.

例 11. (S^2 上の S^2 束の Kirby 図式)

0-ハンドルに, 2-ハンドルを 2 つ, 境界での attaching circle が次の図となるように接着する. ここで 0 と n は framing 係数である. このとき, 境界の 3 次元多様体は S^3 になっているため, 4-ハンドルを貼り合わせることで閉 4 次元多様体を得られる. 事実として, この多様体は S^2 上の S^2 束となる. さらに, S^2 上の S^2 束はこの構成で全て得られる.

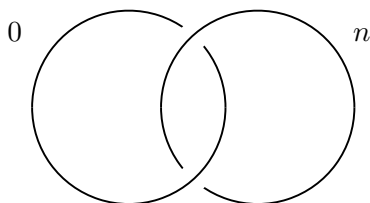


図1 S^2 上の S^2 束の Kirby 図式

2節で述べたように、多様体にハンドル分解が与えられた時、ハンドルスライド・ハンドルの消去・ハンドルの創出によって多様体の微分同相型は不変であった。これは一般に高次元の場合「見る」ことができないが、4次元の場合は Kirby 図式を通じて「見る」ことができる。Kirby 計算とは、 ∂X_1 上の絡み目として表示された、2-ハンドルの attaching circle の move のことである。

Kirby 図式・Kirby 計算の応用として、例えば次を示すことができる。

命題 12.

S^2 上の S^2 束を図 1 の Kirby 図式としてみた時、その微分同相型は n の偶奇によってちょうど 2 つのみである。

命題 13. [GS]

X^4 を 1-ハンドルと 3-ハンドルを持たない 4 次元多様体で、intersection form Q_X が odd であるとする。このとき $X \# S^2 \times S^2 \simeq X \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \mathbb{C}P^2$ である。

5 参考文献

[GS] R. Gompf, and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Studies in Math., 20, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[LP] F. Laudenbach and V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bell. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.

[松本] 松本幸夫, *Morse 理論の基礎*, 岩波書店, 2005.

[M] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies, 51, Princeton University Press, 1963.

Riemann 多様体上のパス空間での functional inequalities

笹森 拓也 (東北大学 D3)

1 モチベーション

パス空間の無限次元解析は確率論における主要なテーマのひとつである。ある状態空間 (多様体, グラフ等) の中を時間が経過するにつれてランダムに動く量というものを数学的に定式化したものが確率過程であるが, 確率過程を考えることと $[0, 1]$ や $[0, \infty)$ から状態空間への連続写像全体の空間 (つまりパス空間) 上に確率測度を与えることは”同値”であるといえる。もっとも典型的な例は \mathbb{R}^n 上のパス空間に Wiener 測度を与えることである。このような確率空間を解析することと \mathbb{R}^n 上の Brown 運動とよばれるもっとも典型的な確率過程を解析することは本質的に同等である。さて, 状態空間として”曲がった”空間を考えてパス空間を解析したら”曲がっていない”場合と比べてどうだろうかという問いは自然であろう。”パス空間を解析”と大雑把に述べたが何を”解析”というかは様々だがここでは FI とよばれるものに着目する。つまりどのようなパス空間ならば FI が成り立つかについて調べていく。当然それは状態空間がどうなっているかに依存する。つまり状態空間の幾何学的な情報がパス空間の解析に直に関わってくる。

2 記号や言葉の準備

M を n 次元連結完備 Riemann 多様体として点 $x \in M$ を固定する。また $\partial M = \emptyset$ とする。点 x を始点とする Brown 運動を $X = \{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ とする。今後, 特に断らない限り M は確率論的完備であるとする。(厳密な定義は省略するがこれは M 上の Brown 運動が有限時間内に爆発しないことを仮定するということである) すると x を始点とする $[0, 1]$ 上の連続関数全体の空間

$$P_x(M) := \{\gamma \in C([0, 1]; M) \mid \gamma(0) = x\}$$

には M 上の Brown 運動 X で $X_0 = x$ をみたすものから自然に定められる Brownian measure μ_x が入る。このとき確率空間 $(P_x(M), \mu_x)$ をパス空間という。パス空間 $P_x(M)$ 上の確率変数 $F: P_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$ に対してその期待値を

$$E[F] := \int_{P_x(M)} F(\gamma) d\mu_x$$

で定める。またパス空間上の L^p ノルム ($1 \leq p < \infty$) を $\|\cdot\|_p$ とおく。すなわち

$$\|F\|_p := E[|F|^p]^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

とおく。

FI には様々なタイプがあるがここでは対数 Sobolev 不等式と Poincaré 不等式について述べる。対数 Sobolev 不等式は Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性 (hypercontractivity) と同値であり, Poincaré 不等

式は Ornstein-Uhlenbeck 半群の生成作用素のスペクトルギャップの存在と同値であることが知られているため FI の中でも特に重要なもののひとつ (ふたつ) である. ある定数 $C > 0$ が存在して

$$E[F^2 \log F^2] \leq C \int_{P_x M} \langle DF, DF \rangle_H d\mu + \|F\|_2^2 \log \|F\|_2^2 \quad (F \in \mathcal{FC}_b^\infty)$$

が成り立つとき, 対数 Sobolev 不等式 (以降は LSI と略記) が成立するといひ,

$$\|F\|_2^2 - \|F\|_1^2 \leq C \int_{P_x M} \langle DF, DF \rangle_H d\mu \quad (F \in \mathcal{FC}_b^\infty)$$

が成り立つとき, Poincaré 不等式 (以降は PI と略記) が成立するという. ここで \mathcal{FC}_b^∞ は smooth bounded cylindrical function 全体の集合であり D は Malliavin 解析の意味での微分作用素であり $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ は Cameron-Martin 内積である. 詳細は省略する. 一般的に LSI から PI が導かれることが知られている.

3 Functional inequalities

パス空間上で FI が成り立つためには M の幾何学的な情報が重要となる.

定理. (1) $P_x(\mathbb{R}^n)$ 上で LSI が成り立つ. ([2] Gross,1975)

(2) M がコンパクトならば $P_x(M)$ 上で LSI が成り立つ. ([1] Aida-Elworthy,1995)

(3) M が非コンパクトでも Ricci 曲率が有界ならば $P_x(M)$ 上で LSI が成り立つ. ([3] Hsu,1997)

Ricci 曲率が非有界な場合はどうなるかという問いは自然であるが LSI や PI については (知る限りでは) 先行結果はない. しかし弱 Poincaré 不等式 (WPI) という”少し弱い”形の FI に関しては次の結果がある. WPI の定義は省略する.

定理. (1) Ricci 曲率の発散スピードがある程度抑えられていれば $P_x(M)$ 上で WPI が成り立つ. ([4] Wang,2004)

Wang は自身の結果を踏まえたうえで [4] で次の問題を提起した.

問題. M に確率論的完備性以外の曲率条件を一切課さずに $P_x(M)$ 上で WPI は成立するか.

この問題は現時点でも部分的な解答しか得られていない.

参考文献

- [1] S. Aida and K. D. Elworthy, *Differential calculus on path and loop spaces. I. Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 321 (1995), no. 1, 97-102.
- [2] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), no. 4, 1061-1083.
- [3] E. P. Hsu, *Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces over Riemannian manifolds*, Comm. Math. Phys. 189 (1997), no. 1, 9-16.
- [4] F.-Y. Wang, *Weak Poincaré inequalities on path spaces*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 2, 89-108.

フラクタル集合

渡邊天鵬

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 博士前期課程 2 年

導入

自然界には海岸線や植物の葉など、「フラクタル」的性質を持つものが多数存在する（図 2 参照）。フラクタル集合に対して、エルゴード理論などの解析学的手法を用いた研究が行われている。本稿では、代表的なフラクタル集合として自己相似系の不変集合を定義し、トポロジーという新たな視点からフラクタル集合を分析する手法を紹介する。

1 フラクタル集合の作り方

定義 1.1. 空でないコンパクト距離空間を (L, d) とし, $f_i : L \rightarrow L (i = 1, \dots, m)$ を連続写像とする. このとき, $\mathcal{L} = (L, (f_1, \dots, f_m))$ が (前方) **自己相似系** であるとは, $L = \bigcup_{i=1}^m f_i(L)$ となることをいう. L を \mathcal{L} の不変集合という.

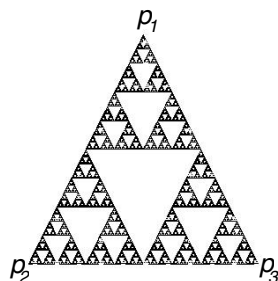


図 1 シェルピンスキーガスケット

定理 1.2 (不変集合の存在). (X, d) を完備距離空間とする. X 上の縮小写像 f_1, f_2, \dots, f_m に対し, X の空でないコンパクト集合 L が一意に存在して, $L = \bigcup_{i=1}^m f_i(L)$ が成立する.

例 1.3 (シェルピンスキーガasket). $m = 3$ として, \mathbb{C} 上の縮小写像 $f_i(z) = \frac{1}{2}(z - p_i) + p_i$ ($i = 1, 2, 3$) を考える. $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ を頂点とする三角形が正三角形のとき, f_1, f_2, f_3 が定める不変集合をシェルピンスキーガasketという (図 1).

2 相互作用ホモロジーの定義と応用

自己相似系 $\mathcal{L} = (L, (f_1, \dots, f_m))$ を考える. $W := \{1, \dots, m\}$ とおき, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) \in W^k$ に対して $f_\omega(L) := f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_2} \circ f_{\omega_1}(L)$ と定める. 相互作用コホモロジーは, 第 k 世代のミニチュア $f_\omega(L)$ たちの重なり具合を Čech コホモロジーのように計算し, $k \rightarrow \infty$ の極限をとることによって定義される:

- 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, L の被覆を $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k(\mathcal{L}) := \{f_\omega(L) \mid \omega \in W^k\}$ によって定める.
- 被覆 \mathcal{U}_k の脈体 (nerve) を $N_k = N_k(\mathcal{L})$ とおく. すなわち, W^k の各元を頂点とし, $\bigcap_{j=0}^r f_{\omega^j}(L) \neq \emptyset$ となる組 $(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^r)$ ($\omega^j \in W^k$ は互いに相異なる) を r -単体とする単体複体である.
- 単体写像 $\phi_k : N_{k+1} \rightarrow N_k$ を頂点 $(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1})$ に対し頂点 $\mapsto (\omega_1, \dots, \omega_k)$ を対応させることによって定義する.
- R を \mathbb{Z} 加群とし, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. 単体複体 N_k の R 係数 p 次コホモロジー群を $\check{H}^p(\mathcal{L}; R)_k$ と記す. 単体写像 ϕ_k は加群の準同型 $\phi_k^* : \check{H}^p(\mathcal{L}; R)_k \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{L}; R)_{k+1}$ を誘導する.
- 順系 $\{\check{H}^p(\mathcal{L}; R)_k, \phi_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ の順極限を $\check{H}^p(\mathcal{L}; R)$ と記し, \mathcal{L} の R 係数 p 次相互作用コホモロジー群という.

相互作用コホモロジー群を考えることには, 次のような利点がある. まず, 相互作用コホモロジー群は自己相似系の不変量であり, $\check{H}^p(\mathcal{L}; R)$ から L の Čech コホモロジー群 $\check{H}^p(L; R)$ への自然な射がある. 各 f_i ($i = 1, \dots, m$) が縮小写像のときこれは同型であるが, k が増加するときの $\text{rank } \check{H}^p(\mathcal{L}; R)_k$ の増大率 $g^p(\mathcal{L})$ は自己相似系の不変量になっている. また, この射は一般には同型でなく, 相互作用コホモロジー群の方が力学系の振る舞いや複雑さをより正確に反映している. 実際, 二つの自己相似系

$\mathfrak{L}_1 = (L_1, (f_1, \dots, f_m))$, $\mathfrak{L}_2 = (L_2, (g_1, \dots, g_n))$ に対して, L_1 と L_2 が同相だが相互作用コホモロジー群が同型でない例が存在する.

フラクタル次元のような既存の解析的手法では, 不変集合 L のミニチュアたちが複雑に重なるときには計算することが非常に難しい. それに比べて, 相互作用コホモロジー群は計算が比較的容易であり, ミニチュアが重なっている状況でも $\check{H}^p(\mathfrak{L}; R)$ 及び $g^p(\mathfrak{L})$ を計算できる場合がある.

3 補足

相互作用コホモロジー群と同様にして, 相互作用ホモロジー群及び相互作用ホモトピー群を定義できる. また, $L = \bigcup_{i=1}^m f_i^{-1}(L)$ (と少しの条件) を満たす関数系 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ と空でないコンパクト集合 L の組を後方自己相似系という. 後方自己相似系についても, 相互作用 (コ) ホモロジーなどを定義できる.



図2 バーンズレイのシダ ([3])

参考文献

- [1] J.Kigami, *Analysis on Fractals, Cambridge Tracts in Mathematics, 143*, Cambridge University Press, 2001.
- [2] H.Sumii, *Interaction cohomology of forward or backward self-similar systems, Adv. Math.*, 222 (2009), no. 3, 729–781.
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern (2017/07/17 アクセス)

結び目カンドル

阿部 綾乃

東京工業大学 理学院数学系数学コース 修士 1 年

1 カンドル

Definition 1.1 集合 X と X 上の 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ がカンドル (quandle) であるとは、次の条件 3 つを満たすときをいう

- (q1) $\forall x \in X, x * x = x$
- (q2) $\forall x, y \in X, \exists! z \in X, s.t. z * y = x$
- (q3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

また、演算 $*$ が (q2), (q3) のみを満たすとき組 $(X, *)$ をラック (rack) という

Lemma 1.2 上の条件 (q2) は次の条件 (q2') に置き換えられる.

- (q2') $\exists \bar{*} : X \times X \rightarrow X, s.t. \forall x, y \in X, (x * y) \bar{*} y = (x \bar{*} y) * y = x$

このとき、 $(X, \bar{*})$ もまたカンドルになり、これを $(X, *)$ の双対カンドルという.

2 カンドルによる coloring

D : oriented knot(link) diagram, X : カンドル

$Arc(D) := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: D を構成する弧の集合

Definition 2.1 $c : Arc(D) \rightarrow X$ が交差 v において彩色条件 (coloring condition) を満たすとは、 v 周りで (図 1) のようになっているとき、次の条件を満たすことをいう.

$$c(a_i) * c(a_j) = c(a_k) \tag{1}$$



図 1

$c : Arc(D) \rightarrow X$ が D のカンドル X による X -彩色 (coloring) とは、全ての交差において彩色条件を満たすことをいう。

カンドル X による D の X 彩色の集合を $\text{Col}_X(D)$, その濃度を $\text{col}_X(D)$ と表し X 彩色数という.

Proposition 2.2 2 つの diagram D, D' が同値な oriented knot(link) を表すとき, $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に $\text{col}_X(D)$ は oriented knot(link) の不変量である.

oriented surface knot についても daiagram を構成する曲面の集合から X への写像を考えることで, 同様に彩色を考えることができる.

3 結び目カンドル

K : oriented knot(link), $N(K)$: regular neighborhood, $p \in \mathbb{R}^3 \setminus N(K)$
 K の meridian disk D と, ∂D 上の一点から p へ向かう曲線 α の組 (D, α) を考え, そのホモトピー類 $[(D, \alpha)]$ の全体集合を $Q(K, p)$ で表す.

Definition 3.1 $Q(K, p)$ 上の 2 項演算 $*$ を次のように定める.(図 2)

$$[(D_1, \alpha)] * [(D_2, \beta)] := [(D_1, \alpha\beta^{-1}\partial D_2\beta)] \quad (2)$$

この演算によって $Q(K, p)$ はカンドルになる. このカンドル $Q(K, p)$ を K の基本カンドルまたは結び目カンドルという.

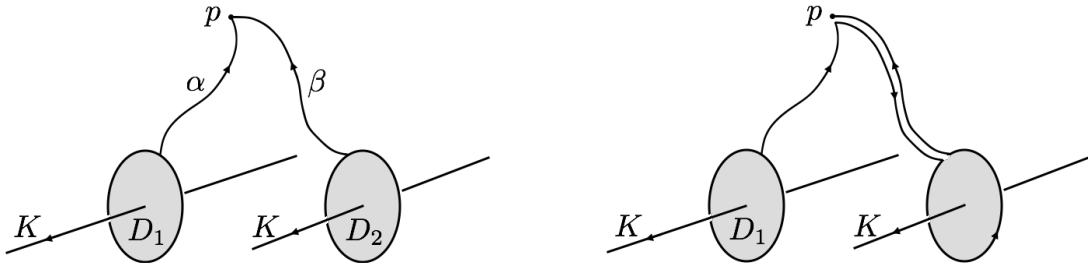


図 2

Theorem 3.2 oriented knot K, K' に対して, $Q(K)$ と $Q(K')$ が同型ならば K と K' は weak equivalent. (K と K' が weak equivalent \Leftrightarrow ある同相写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在する)

カンドル X に対して群表示 $\langle x \in X \mid x * y = y^{-1}xy \ (x, y \in X) \rangle$ が表す群を X の付随群といい, $As(X)$ で表す.

Proposition 3.3 $\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ と $As(Q(K))$ は同型である.

参考文献

[1] 鎌田聖一: 曲面結び目理論, 丸善出版, 2012

結び目の $SL_2\mathbb{C}$ -指標多様体のゼータ関数

坂中大志

京都大学 数理解析系 修士 2 年

3次元多様体の $SL_2\mathbb{C}$ -指標多様体は Culler–Shalen[1] によって導入され、双曲 3次元多様体への応用が知られている。指標多様体は代数的集合であり、合同ゼータ関数や Hasse–Weil ゼータ関数といった数論的な対象を考えることができる。これらの対象と 3次元多様体の不変量との関係について知られている事実を紹介する。

定義 1. 3次元多様体 M に対し、

$$X(M) := \{\chi_\rho := \text{tr}(\rho(g)) \mid \rho : \pi_1(M) \rightarrow SL_2\mathbb{C}\}$$

を M の $SL_2\mathbb{C}$ -指標多様体という。

$SL_2\mathbb{C}$ -指標多様体は \mathbb{Z} 係数多項式で定義される \mathbb{C} 上のアフィン代数的集合とみなすことができる。

定義 2. $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$ で定義された \mathbb{C} 上のアフィン代数的集合 X に対して、

$$X(\mathbb{F}_q) = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{F}_q \mid f_1(a_1, \dots, a_m) = \dots = f_r(a_1, \dots, a_m) = 0\}$$

とおく。

$$Z(X, p, T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} T^n\right)$$

を X の p における合同ゼータ関数という。また

$$\zeta(X, s) = \prod_p Z(X, p, p^{-s})$$

を X の Hasse–Weil ゼータ関数という。

Hasse–Weil ゼータ関数に関する Riemann 予想の類似は一般には未解決であるが、代数多様体の合同ゼータ関数に関する Riemann 予想の類似が成り立つことは Weil 予想として知られている。代数曲線の場合には次のように書ける。

定理 3. \mathbb{F}_p 上定義された種数 g の非特異射影曲線 X に対し、次が成り立つ。

(i) ある $F(T) = 1 + \dots + p^g T^{2g} \in \mathbb{Z}[T]$ に対し、

$$Z(X, T) = \frac{F(T)}{(1-T)(1-pT)}.$$

(ii) 次の関数等式が成り立つ：

$$Z\left(X, \frac{1}{pT}\right) = p^{1-g} T^{2-2g} Z(X, T).$$

(iii) $F(T)$ の根は $|T| = 1/\sqrt{p}$ をみたく。

結び目 K に対して、 K の S^3 における補空間の指標多様体およびゼータ関数を、それぞれ K の指標多様体、ゼータ関数と呼ぶ。結び目不変量とゼータ関数との関係について、例えば次のことが知られている。

定理 4 ([2]). figure-8 knot の既約指標からなる Hasse–Weil ゼータ関数の完備化 $\xi(s)$ は \mathbb{C} 上有理関数に解析接続されて $s = 1$ を零点にもち、

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\xi(s)}{s-1} = -\frac{\text{AGM}(\phi, \phi-1)}{\sqrt{10} \log \phi}$$

をみたく。ここで $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ 、AGM は算術幾何平均であり、 $\phi, \phi-1$ は figure-8 knot の Alexander 多項式 $t^2 - 3t + 1$ の根の平方根である。

双曲結び目に対して、指標多様体の連結成分のうちホロノミー表現の指標を含むものを双曲成分という。定義などを詳しくは述べないが、数論的な 2-bridge link (有限個しかない) に対しては、双曲成分の $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_1$ への埋め込みが \mathbb{P}_1 上の conic bundle 構造をもつことを利用して、Hasse–Weil ゼータ関数が具体的に求められている ([3])。しかし、このような構造をもたない絡み目も存在する ([5])。

さらに、数論的 3 次元多様体に対して、Hasse–Weil ゼータ関数の $s = 2$ における特殊値が双曲体積と関係していることが知られている。

雑多ではあるが、いくつか問題を挙げる。

- 任意の双曲 2-bridge knot/link の指標多様体の双曲成分に、都合のいい構造は入るか。2-bridge 以外ではどうか。
- ある系列の結び目に対して、ゼータ関数を明示的に書くことはできるか。
- 結び目の不変量とゼータ関数の間に関係はあるか。
- ゼータ関数と A -polynomial の間に関係はあるか。

参考文献

- [1] Culler, M., Shalen, P. B., *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), 109–146.
- [2] Harada, S., *Hasse–Weil zeta function of absolutely irreducible SL_2 -representations of the figure 8 knot group*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3115–3125.
- [3] Harada, S., *Hasse–Weil zeta functions of SL_2 -character varieties of arithmetic two-bridge link complements*, Finite Fields Appl. **27** (2014), 115–129.
- [4] Harada, S., *Hasse–Weil zeta functions of SL_2 -character varieties of closed orientable hyperbolic 3-manifolds*, <https://arxiv.org/abs/1512.07747>.
- [5] Landes, E., *Identifying the canonical component for the Whitehead link*, Math. Res. Lett. **18** (2011), 715–731.

Latin bitrade とトポロジー

東京工業大学 博士課程 3年 村上広樹

Latin bitrade とは partial latin squares のペアのことである。本稿ではこの latin bitrade とトポロジーの関係について述べる。ページ数の都合でかなり大雑把なことしか書いていないので、詳しく知りたい方には参考文献 [1] をご覧いただきたい。

1 Latin square

まず, latin bitrade を定義するために必要な latin square の定義を述べる。

定義 1.1 (Latin square). n 行 n 列の表に n 個の異なる記号を、各記号が各行および各列に 1 回だけ現れるように並べたものを **Latin square** という。 n を latin square の **オーダー** という。第 1 行および第 1 列が自然な順序で並んでいる Latin square を **標準形** という。

定義 1.2. 何も書いていないマス目がある Latin square を **partial latin square** という。 Filled-in cells の数を partial latin square の **オーダー** という。

例 1.3. Latin square と partial latin square の例を挙げる。

0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

表 1 Latin square.

	1	2	3
1	0	3	
2		0	1
3	2		0

表 2 Partial latin square.

定義 1.4. 2 つの latin squares について、一方の行、列または記号を並べ替えて他方が得られるとき、それらは同型であるという。

定義 1.5. 2 つの latin squares について、一方の行、列または記号の役割を入れ替えて他方が得られるとき、それらは共役であるという。

2 Latin bitrade

この節では latin bitrade を定義し、その例を見ていく。

定義 2.1. T と T' をオーダー n の partial latin squares とする。 (T, T') が以下の 3 つの条件を満たすとき、 (T, T') をオーダー n の **latin bitrade** という。

- T と T' で、数字が入っているマスは同じ。
- T と T' で、同じ数字が入っているマス目は存在しない。
- T の各行 (列) には、 T' の各行 (列) と同じ数字が入っている。

例 2.2. Latin bitrade の例を挙げる.

	1	2	3
1	0	3	
2		0	1
3	2		0

表 3 T .

	2	3	1
3	1	0	
1		2	0
2	0		3

表 4 T' .

	1_2	2_3	3_1
1_3	0_1	3_0	
2_1		0_2	1_0
3_2	2_0		0_3

表 5 (T, T') .

注意 2.3. (T, T') が latin bitrade であるとき, T を T' の disjoint mate という.

3 Separated latin bitrade の種数

最後に, separated latin bitrade と呼ばれる latin bitrade からグラフが構成できることを述べる. さらに, このグラフが埋め込まれている曲面の種数が bitrade の情報から計算できることを見ていく.

定義 3.1. Latin bitrade の各行は alternating permutation を与えるが, その置換が single cycle になっているとき, latin bitrade は **separated** であるという. 任意の non-separated bitrade は各サイクルに対応する新たな行, 列または記号を加えることで separated に変形することができる.

Latin bitrade (T, T') の行, 列および記号の集合をそれぞれ R, C, S と書くことにする. このとき, (T, T') からグラフ G を構成することができる. 頂点集合を $R \cup C \cup S$ とし, T に現れた成分同士を辺で結ぶことでグラフ G を得られる. 頂点が T に属しているか T' に属しているかで面を白か黒に塗り分け, 白い面にある辺に $R \rightarrow C, C \rightarrow S, S \rightarrow R$ という向きをつける. そうすると白の三角形と黒の三角形が coherent な向きを持つことが分かるので, グラフ G はある向き付けられた曲面に埋め込まれることになる. この曲面の種数を g とすると, Euler の公式から g は

$$\begin{aligned} g &= \frac{2 + e - f - v}{2} \\ &= \frac{2 + 3|T| - |T| - |T'| - |R| - |C| - |S|}{2} \\ &= \frac{2 + |T| - |R| - |C| - |S|}{2} \end{aligned}$$

と計算できる.

参考文献

- [1] N. Cavenagh, The theory and application of latin bitrades: a survey, Math. Slovaca 58 (2008), No. 6, 691-718.